אלגברה לינארית 1

מבוסס על הרצאותיו של פרופ' פלוטקין יבגני

שיעור 3

מספרים מרוכבים

$$z = \varphi \left(cos \left(\varphi \right) + isin \left(\varphi \right) \right)$$

$$r^2 = a^2 + b^2$$

$$\varphi = arctan \left(\frac{b}{a} \right)$$

בהינתן 2 מספרים מרוכבים $z_1 = r_1 \left(cos\varphi_1 + isin\varphi_1 \right), z_2 = r_2 \left(cos\varphi_2 + isin\varphi_2 \right)$
אזי המכפלה נתונה ע"י:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \left(cos \left(\varphi_1 + \varphi_2 \right) + isin \left(\varphi_1 + \varphi_2 \right) \right)$$

נוסחת דה־מואבר:

$$z^n = r^n \left(cos \left(n\varphi \right) + isin \left(n\varphi \right) \right)$$

הופכי של z:

$$z^{-1} = \frac{1}{z} \left(cos \left(-\varphi \right) + isin \left(-\varphi \right) \right) = \frac{1}{z} \left(cos\varphi - isin\varphi \right)$$

המשפט היסודי של האלגברה:

$$f \left(x \right) = \left(x - \alpha_1 \right) \left(x - \alpha_2 \right) ... \left(x - \alpha_n \right),\ a_k \in \mathbb{C} \rightarrow \left| f \left(x \right) \right| = n$$

עבור $n \leq 4$ קיימת נוסחה כללי לפתרון.
משפט גלואה קובע כי עבור $n \geq 5$ לא קיימת נוסחה כללית לפתרון.

חבורה:

נניח שקיימת קבוצה G ופעולה $\cdot$, $a_1, a_2 \in G$ $(G, \cdot)$ אזי מתקיים: $a_1 \cdot a_2 = a_3 \in G$ (סגירות לפעולה)

כמו כן מתקיימות האקסיומות הבאות:

1. אסוציאטיביות:

$$(a_1, a_2)\, a_3 = a_1, (a_2, a_3)$$

2. קיום איבר ניטרלי לפעולה:

$$\exists e\, a \cdot e = e \cdot a = a$$

3. קיום איבר הפכי לפעולה:

$$\forall a \in G, \exists a^{-1} \rightarrow a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$$

חוג: נניח שקיימת קבוצה A ופעולות $\cdot$, $a_1, a_2 \in A$ $(A, +, \cdot)$ אזי מתקיים: $a_1 + a_2 = a_3 \in A$ (סגירות לחיבור), $a_1 \cdot a_2 = a_3 \in A$ (סגירות לכפל)

כמו כן מתקיימות האקסיומות הבאות:

1. אסוציאטיביות החיבור:

$$(a_1 + a_2) + a_3 = a_1 + (a_2 + a_3)$$

2. קיום איבר ניטרלי לחיבור:

$$\exists e\, a + e = e + a = a$$

3. קיום איבר נגדי לחיבור:

$$\forall a \in A\,, \exists - a \rightarrow a + (-a) = (-a) + a = e$$

4. קומוטטיביות החיבור:

$$a + b = b + a$$

5. אסוציאטיביות החיבור:

$$a\,(bc) = (ab)\,c$$

6. דיסטריבוטיביות:

$$(a + b)\, c = ac + bc$$

$$a\left(b+c\right)=ab+ac$$

7. קיום איבר ניטרלי לכפל:

$$a\cdot e=e\cdot a=a$$

8. קומוטטיביות הכפל:

$$ab=ba$$

9. מאפיין אשר לא שייך לחוג אך אם מצרפים אותו, למעשה הגדרנו שדה:

$$\forall a\neq0\,,\,a^{-1}=e$$

משפט: שדה נקרא שדה פרימיטיבי אסם לא קיים לו תת־שדה.

משפט: קיימים 2 שדות פרימיטיביים: $\mathbb{Q}\,,\,\mathbb{Z}_{p}\,\,\text{when p is prime}$.

שיעור 4

דירוג מטריצה

נתונה מטריצה I כלשהי ומגיעים ע"י שיטת הדירוג (צמצום) של גאוס למטריצה II בצורת מדרגות ע"י שלושת הפעולות האלמנטריות:
1) החלפת שורות
2) הכפלת שורה בסקלר
3) חיבור שתי שורות $u+tv$ וכפל בסקלר שונה מאפס, t.

$$\begin{cases}AX=B\\AX=0\end{cases}$$

פתרון של משוואה לא הומוגנית = פתרון פרטי של המשוואה הלא הומוגנית + פתרון כללי של המשוואה ההומוגנית.

נתבונן במטריצה המדורגת A, עם nעמודות (משתנים) ו־m שורות.
אזי הדרגה של המערכת, המסומנות $d=rank\left(A\right)$, הוא מספר השורות (והעמודות) הבלתי תלויות לינארית.
d זהו גם מימד מרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית.
כאשר $d=n$, יש פתרון יחיד וכאשר $d<n$ יש משתנה חופשי (לפחות אחד) ולפיכך יש אינסוף פתרונות.
כאשר יש לנו סכימה כפולה, ניתן לשנות את סדר הסכימה:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(a_{ij}\right)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\left(a_{ij}\right)$$

$$AB\neq BA$$

$$AI = IA = A$$

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

A^{-1} לא בהכרח קיימת, אך אם היא קיימת אזי בהכרח היא ריבועית (לפי הכלל לעיל)

$$\left(A^T\right)^T = A$$

$$(A+B)^T = A^T + B^T$$

$$(\alpha A)^T = \alpha A^T$$

$$(AB)^T = B^T A^T$$

מטריצות מיוחדות

מטריצה משולשית עליונה:

$$t_{12} = \begin{matrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{matrix} = x_{12}(t)$$

מטריצה משולשית תחתונה:

$$t_{21} = \begin{matrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{matrix} = x_{21}(t)$$

שיעור 5

דטרמיננטה

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow \det A \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} \in \mathbb{F}$$

תהליך הדירוג של גאוס מאפשר לנו למצוא את המטריצה ההופכית A^{-1}, במידה וקיימת (אם הדטרמיננטה שונה מ־0, אזי קיימת מטריצה הופכית)

תיאור התהליך: נרשום את מטריצת היחידה לצד המטריצה A שלנו. נדרג את המטריצה A לצורת מטריצת היחידה, כאשר כל פעולה שנבצע על המטריצה A, נבצע גם על מטריצת היחידה.

כאשר A תגיע לצורת מטריצת היחידה, המטריצה שרשמנו בצד תהיה המטריצה A^{-1} המבוקשת.

מרחב לינארי

יהי שדה $\mathbb{K}$ כלשהו של סקלרים ($\mathbb{K}=\mathbb{R},\mathbb{C}$ בדרך כלל)
נתבונן ב־$(A,\mathbb{K})$ זוהי חבורה אבלית (בעלת קומוטטיביות לפעולת סכום $+$)
והאקסיומות הבאות מתקיימות:

1. $(a+b)+c=a+(b+c)$
2. $a+0=0+a=0$
3. $\forall a\in A,\exists(-a)\quad|\quad a+(-a)=(-a)+a=0$
4. $a+b=b+a$
5. $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{K},\quad\alpha(\beta a)=(\alpha\beta)a$
6. $1_{\mathbb{K}}\cdot a=a$
7. $(\alpha_1+\alpha_2)a=a_1a+\alpha_2 a$

כמו כן קיימת הדרישה לסגירות לפעולות החיבור והכפל: $\bullet:(A\times A)\to A\quad,\quad+:(A\times K)\to A$

דוגמאות למרחבים לינאריים:

1)העולם שלנו: $\mathbb{R}^3$.
2) $M_{n\times l}(\mathbb{K})$ המטריצות מסדר $n\times k$ של השדה $\mathbb{K}$. (כאשר $n=l$, אזי זהו מקרה פרטי של מטריצות ריבועיות).
3) מרחב לינארי נוסף ניתן ע"י הסימון הסטנדרטי: $\mathbb{R}^n$ או $\mathbb{C}^n$, שמשמעו הוא המכפלה הקרטזית $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ ו־ $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$.
4) אם יש 2 מרחבים לינאריים, $\mathbb{V}_1,\mathbb{V}_2$ אזי $\mathbb{V}_1\times\mathbb{V}_2=\mathbb{V}$, גם התוצאה היא מרחב לינארי.
5) $A\cdot X=0$, המערכת ההומוגנית מקיימת דיכוטומיה: או שיש פתרון יחיד והוא הפתרון הטריוויאלי, או שיש אינסוף פתרונות (לא קיים מצב בו יש 2 פתרונות, למשל).

תת־מרחב לינארי

יהי V מרחב לינארי, ויהי Uתת־מרחב לינארי שלו. אזי מתקיים $U\subseteq V$ ומתקיימת סגירות לכל שני וקטורים מתת־המרחב לעצמו.

שיעור 4

מרחבים ותת־מרחבים לינאריים

יהי V מרחב לינארי ויהי $U\subseteq V$ תת־מרחב לינארי.
לכל מרחב לינארי תמיד מתקיים $0\subseteq V$, $V\subseteq V$.
נניח $v_1,v_2,\ldots,v_k$ וקטורים ששייכים ל־V, נרצה לבדוק אם קיים תת־מרחב הכולל את כל הווקטורים הללו:
אזי יהיו סקלרים מהשדה $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k\in\mathbb{K}$ אז נבנה את הקבוצה: $\{\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\ldots+\alpha_kv_k\},\alpha_i\in\mathbb{K},1\le i\le k$
המייצגת את כל האפשרויות להצגת וקטורים בתת המרחב.

תרגיל:

U מרחב לינארי, ויהיה $u_1,u_2\in U$ אזי $u_1+u_2\in U$

הוכחה:

$$u_1=\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\ldots+\alpha_kv_k\quad,\quad u_2=\beta_1v_1+\beta_2v_2+\ldots+\beta_kv_k$$

אזי:

$$u_1+u_2=\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\ldots+\alpha_kv_k+\beta_1v_1+\beta_2v_2+\ldots+\beta_kv_k=\underbrace{(\alpha_1+\beta_1)}_{\in\mathbb{K}}v_1+\underbrace{(\alpha_2+\beta_2)}_{\in\mathbb{K}}v_2+\ldots+\underbrace{(\alpha_k+\beta_k)}_{\in\mathbb{K}}v_k\in U$$

הגדרה:

$$span(v_1,\ldots,v_k)=\langle v_1,\ldots,v_k\rangle=\{\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\ldots+\alpha_kv_k\}$$

לימה:

$v_1,\ldots,v_k \in V$ אזי $span\left(v_1,\ldots,v_k\right)$

משפט:

אם U_1, U_2 תתי מרחבים, אזי $U_3 = U_1 \cap U_2$

מסקנה מהמשפט: אם $v_1,\ldots,v_k \in U_j$ לכל U_j, $\bigcap\limits_{j=1}^{\infty}$ אזי $U = U_j$ (חיתוך אינסופי)

הגדרה:

אם $U, V \subset L$ תתי מרחבים, אזי $U + V = \{u + v \,|\, u \in U\,,\ v \in V\}$

הגדרה:

הסכום הישר של U ו־ V אם $U \cap V = 0$ ויסומן $U \oplus V$.

טענה: לכל סכום ישר קיימת הצגה יחידה.

הוכחה: נניח בשלילה קיימות שתי הצגות שונות: $a = u_1 + v_1$ וגם $a = u_2 + v_2$ וגם $u_1 \neq u_2 \vee v_1 \neq v_2$

$$0 = a - a = u_1 + v_1 - u_2 - v_2 = (u_1 - u_2) + (v_1 - v_2) \Longrightarrow c = u_1 - u_2 = v_2 - v_1$$

אזי:

$$c \in U \cap V \Longrightarrow c = 0 \Longrightarrow u_1 = u_2, v_1 = v_2$$

סתירה.

וקטורים תלויים ובלתי תלויים לינארית

יהיו $v_1,\ldots,v_k$ ווקטורים

הגדרה:

נאמר שהווקטורים $v_1,\ldots,v_k$ יקראו בלתי תלויים לינארית אם המשוואה: $\alpha_1 v_1,\ldots,\alpha_k v_k = 0$ מתקיימת רק אם $\alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0$

נאמר שהווקטורים $v_1,\ldots,v_k$ יקראו תלויים לינארית אם למשוואה: $\alpha_1 v_1,\ldots,\alpha_k v_k = 0$ קיים פתרון כך ש־ $\exists\alpha_i \neq 0$

הגדרה:

נאמר שהווקטורים $v_1,\ldots,v_k$ יקראו בסיס למרחב V אם:

1) הווקטורים פורשים את המרחב: $span\left(v_1,\ldots,v_k\right) = V$

2) הווקטורים הם בלתי תלויים לינארית (בת"ל):

שיעור 5

משפט:

יהיו $v_1,\ldots,v_k$ ת"ל, ו־ $v_1,\ldots,v_s$ ת"ל , אזי $v_1,\ldots,v_k,v_{k+1},\ldots,v_s$ ת"ל. (ז"א: חיבור של שני ווקטורים תלויים לינארית יהיה תלוי לינארית).

הוכחה:

$$\exists\alpha, 1\le i\le k, \qquad \alpha_1v_1+\ldots+\alpha_iv_i+\ldots+\alpha_kv_k=0 \quad ,\alpha_i\neq 0$$

$$\alpha_1v_1+\ldots+a_iv_i+\ldots+\alpha_kv_k+0\cdot v_{k+1}+\ldots+0\cdot v_s=0$$

ומכיוון ש־ $\alpha_i\neq 0$ אז גם התוצאה תלויה לינארית.

משפט:

יהיו $v_1,\ldots,v_k,v_{k+1},\ldots,v_s$ בת"ל, $k<s$ אזי $v_1,\ldots,v_k$ בת"ל. (ז"א: חלק מווקטור בלתי תלוי לינארית גם יהיה בלתי תלוי לינארית).

הוכחה: ניקח חלק מהווקטור $v_1,\ldots,v_s$ עד המקום ה־k: $v_1,\ldots,v_k$
נניח בשלילה כי הוא תלוי לינארית, אזי לפי משפט 1, ניתן לקחת: $v_1,\ldots,v_k$ ת"ל וגם $v_{k+1},\ldots,v_s$ ת"ל כך שהחיבור גם יהיה ת"ל.
אבל החיבור הוא $v_1,\ldots,v_s$ ונתון כי הוא בת"ל.

משפט:

$v_1,\ldots,v_k$ ת"ל אסם קיימת להם הצגה כקומבינציה לינארית: $v_i=\sum\limits_{i\neq j}\beta_jv_j$.

הוכחה: נניח $v_1,\ldots,v_k$ ת"ל, אזי:

$$\exists\alpha, 1\le i\le k, \qquad \alpha_1v_1+\ldots+\alpha_iv_i+\ldots+\alpha_kv_k=0 \quad ,\alpha_i\neq 0$$

נציב $-\alpha=\beta$

$$\frac{\beta_1}{\alpha_i}v_1+\ldots+\frac{\beta_{i-1}}{\alpha_i}v_{i-1}+\frac{\beta_{i+1}}{\alpha_i}v_{i+1}+\ldots+\frac{\beta_k}{\alpha_i}v_k=v_i$$

ומצאנו קומבינציה לינארית עבורו.
נניח קיימת קומבינציה לינארית, $v_i=\sum\limits_{i\neq j}\beta_jv_j$:
אזי:

$$v_i=\beta_1v_1+\ldots+\beta_{i-1}v_{i-1}+\beta_{i+1}v_{i+1}+\ldots+\beta_kv_k$$

$$0=\beta_1v_1+\ldots+\beta_{i-1}v_{i-1}+(-v_i)+\beta_{i+1}v_{i+1}+\ldots+\beta_kv_k$$

קיים מקדם שונה מאפס המקיים את המשוואה (למשל, המקדם של v_i) ולכן התוצאה ת"ל.

משפט:

$v_1,\ldots,v_k$ בת"ל נוסיף להם וקטור v_{k+1}אשר קיימת לו הצגה כקומבינציה לינארית שלהם: $v_{k+1}=\sum\limits_{i=1}^{k}\alpha_iv_i$, אזי הקבוצה $v_1,\ldots,v_{k+1}$ ת"ל.

הוכחה:

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k = 0 \qquad ,\forall \alpha_i, 1 \le i \le k, \alpha_i = 0$$

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k + v_{k+1} = 0$$

משפט: $v_1, \ldots, v_k$ בת"ל נוסיף להם וקטור v_{k+1}אשר לא קיימת לו הצגה כקומבינציה לינארית שלהם: $v_{k+1} \neq \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i$, אזי הקבוצה $v_1, \ldots, v_{k+1}$ בת"ל.

הוכחה:

משפט: יחידות ההצגה. לכל וקטור, אם קיימת לו הצגה כצ"ל של ווקטורים בת"ל אזי ההצגה היא יחידה.

הוכחה:

$$v =$$

שיעור 6

בסיס

יהיו $v_1, v_2, \ldots, v_n$ ווקטורים בת"ל הפורשים את V אזי הם בסיס ל־V ונסמן אותם ב־ $\langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle$
נוכיח משפט:

משפט:

יהי V מ"ו, ויהיו $V = \langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle$ n וקטורים בבסיס.
אזי לכל $u_1, u_2, \ldots, u_s$ וקטורים בת"ל ב־V מתקיים $s \le n$.
נניח בשלילה $s > n$:
מכיוון ש־u_i נמצאים ב־V קיימת להם הצגה יחידה בבסיס:

$$\begin{cases} u_1 = a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + \ldots + a_{1n}v_n \\ u_2 = a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + \ldots + a_{2n}v_n \\ \vdots \\ u_s = a_{s1}v_1 + a_{s2}v_2 + \ldots + a_{sn}v_n \end{cases}$$

מכיוון ש־u_i בת"ל מתקיים: $\beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \ldots + \beta_s u_s = 0$ כך שכל β_i חייב להיות אפס.
ניתן להציג גם כ:

$$\beta_1 \left(a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + \ldots + a_{1n}v_n\right) + \beta_2 \left(a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + \ldots + a_{2n}v_n\right) + \ldots + \beta_s \left(a_{s1}v_1 + a_{s2}v_2 + \ldots + a_{sn}v_n\right) = 0$$

ששקול ל:

$$\left(\beta_1 a_{11} + \beta_2 a_{21} + \ldots + \beta_s a_{s1}\right) v_1 + \left(\beta_1 a_{12} + \beta_2 a_{22} + \ldots + \beta_s a_{s2}\right) v_2 + \ldots + \left(\beta_1 a_{1n} + \beta_2 a_{2n} + \ldots + \beta_s a_{sn}\right) v_n = 0$$

אזי כל מקדם של v_i הוא אפס, מכיוון שזוהי הצגה בבסיס:

$$\begin{cases} \beta_1 a_{11} + \beta_2 a_{21} + \ldots + \beta_s a_{s1} = 0 \\ \beta_1 a_{12} + \beta_2 a_{22} + \ldots + \beta_s a_{s2} = 0 \\ \vdots \\ \beta_1 a_{1n} + \beta_2 a_{2n} + \ldots + \beta_s a_{sn} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{21} \cdot x_2 + \ldots + a_{s1} \cdot x_s = 0 \\ a_{12} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \ldots + a_{s2} \cdot x_s = 0 \\ \vdots \\ a_{1n} \cdot x_1 + a_{2n} \cdot x_2 + \ldots + a_{sn} \cdot x_s = 0 \end{cases}$$

אזי קיבלנו מערכת משוואות הומוגנית מהצורה $A \cdot X = 0$. לפי ההנחה בשלילה, $s > n$ ולכן קיים פתרון לא טריוויאלי למערכת, וקיבלנו סתירה לכך ש־$\beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \ldots + \beta_s u_s = 0$ בת"ל. ■

מסקנה:

אם קיימים $v_1, \ldots, v_k$ ו־ $u_1, \ldots, u_s$ בסיסים למרחב V , אזי $s = k$.
הוכחה: לפי המשפט הקודם מתקיים $k \leq s$ וגם $s \leq k$ ולכן $s = k$.

מימד

יהי מרחב לינארי V, עם בסיס $v_1, \ldots, v_n$ אזי נגדיר את המימד של V להיות n ונסמן $\dim V = n$.
המימד של V הוא מספר הווקטורים בבסיס. הגדרה שקולה: המימד של V הוא מספר מקסימלי של וקטורים בת"ל.

הצגה בבסיס הסטנדרטי

הי $V = M^{n \times n}$ מרחב המטריצות הריבועיות בגודל n. אזי

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \overbrace{1}^{\text{row i column j}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \{e_{ij}\} = \begin{cases} 0 & \text{not row i or not column j} \\ 1 & \text{row i column j} \end{cases}$$

אזי כל וקטור v במרחב ניתן להצגה יחידה בבסיס הסטנדרטי e:

$$v = a_{11} \cdot e_{11} + a_{12} \cdot e_{12} + \ldots + a_{1n} \cdot e_{1n} + a_{2n} \cdot e_{2n} + \ldots + a_{nn} \cdot e_{nn}$$

מטריצה נילפוטנטית

מטריצה תקרא מטריצה נילפוטנטית אם קיים n טבעי כך שמתקיים $A^n = 0$.

משפט:

יהי K שדה, אזי $\dim K^n = n$.

העתקות לינאריות

יהיו U, V מרחבים לינאריים ותהי $\varphi : V \longrightarrow U$ פונקציית העתקה מ־V ל־U, כך שמתקיים:
1) $\varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2)$
2) $\varphi(\alpha v) = \alpha \varphi(v)$
אם תנאים 1 ו־ 2 מתקיימים, אזי הפונקציה φ נקראת לינארית.
אם פונקציה φ היא חח"ע ועל אזי היא איזומורפית. (נותנת מצב של איזומורפיזם)

שיעור 7

הגדרת ווקטור

יהי מרחב L, $\dim L = n$ אזי קיים לו בסיס בעל n וקטורים: $\langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle$ כך שלכל ווקטור $v \in L$ קיימת הצגה יחידה $v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$ בבסיס הזה.
ניתן לייצג את הווקטור על פי המקדמים, כקואורדינטה $v = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$

משפט:

לכל ווקטור קיימת הצגה יחידה בבסיס.

הוכחה: נניח בשלילה כי קיימות שתי הצגות לווקטור $v \in V$:

$$v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$$
$$v = \beta_1 v_1 + \ldots + \beta_n v_n$$

אזי $0 = (\alpha_1 - \beta_1) v_1 + \ldots + (\alpha_n - \beta_n) v_n$ אך מכיוון שהבסיס הוא בת"ל זה מתקיים אםם $0 = \underbrace{(\alpha_1 - \beta_1)}_{0} v_1 + \ldots + \underbrace{(\alpha_n - \beta_n)}_{0} v_n$

ולכן $\alpha_i = \beta_i \Longleftrightarrow \alpha_i - \beta_i = 0$ לכל $1 \leq i \leq n$.

הגדרה:

נאמר ששני מרחבים לינאריים הם איזומורפיים אם קיימת פונקציה חח"ע ועל, אשר היא גם לינארית (שומרת על סגירות לחיבור וכפל בסקלר).

משפט:

יהיו שני מ"ו L_1, L_2 אזי מתקיים: $L_1 \simeq L_2 \Leftrightarrow \dim L_1 = \dim L_2$ (איזומורפיים)

הוכחה: אם $L_1 \simeq L_2$ הטענה טריוויאלית, מכיוון שהם זהים בתכונותיהם.
אם $\dim L_1 = \dim L_2 = n$ אזי ניתן לייצג כמטריצה:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = a_1 e_1 + \ldots + a_n e_n \,|\, e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

נבחר בסיס $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle$ ב־L_1, ונגדיר פונקציה $\varphi : L_1 \longrightarrow \mathbb{R}^n$ כך שמתקיים
$$\begin{matrix} \varphi(v_1) = e_1 \\ \varphi(v_2) = e_2 \\ \vdots \\ \varphi(v_n) = e_n \end{matrix}$$
אזי מתקיים:

$$\varphi(v) = \varphi(a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_n v_n) = a_1 \varphi(v_1) + a_2 \varphi(v_2) + \ldots + a_n \varphi(v_n) = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \ldots + a_n v_n$$

הפונקציה φ הפיכה, נראה כי קיימת לה φ^{-1} :

$$\varphi^{-1} : \mathbb{R}^n \longrightarrow L_1$$

נגדיר את הפונקציה להיות
$$\begin{matrix} \varphi^{-1}(e_1) = v_1 \\ \varphi^{-1}(e_2) = v_2 \\ \vdots \\ \varphi^{-1}(e_n) = v_n \end{matrix}$$
אזי מתקיים:
$$\begin{matrix} \varphi \circ \varphi^{-1}(e_i) = \varphi\left(\varphi^{-1}(e_i)\right) = \varphi(v_i) = e_i \\ \varphi^{-1} \circ \varphi = \varphi^{-1}(\varphi(v_i)) = \varphi^{-1}(e_i) = v_i \end{matrix}$$

נראה כי היא לינארית:
יהיו $u_1, u_2 \in L_1$ אזי:

$$\varphi(u_1 + u_2) = \varphi(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n + \beta_1 v_1 + \ldots + \beta_n v_n) = \varphi((\alpha_1 + \beta_1) v_1 + \ldots + (\alpha_n + \beta_n) v_n) =$$

$$(\alpha_1 + \beta_1) \varphi(v_1) + \ldots + (\alpha_n + \beta_n) \varphi(v_n) = \alpha_1 \varphi(v_1) + \ldots + \alpha_n \varphi(v_n) + \beta_1 \varphi(v_1) + \ldots + \beta_n \varphi(v_n) =$$

$$= (\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n) + (\beta_1 e_1 + \ldots + \beta_n e_n) = \varphi(u_1) + \varphi(u_2)$$

באותו אופן נראה סגירות לכפל בסקלר ומצאנו ש־φ לינארית.
מכיוון ש־φ חח"ע ועל, ולינארית בין $L_1 \simeq \mathbb{R}^n \simeq L_2$ אזי קיימת φ' כך שמתקיים $L_1 \simeq L_2$.

שיעור 8

משפט המימדים

יהי מרחב V ויהיו תתי מרחבים $A, B < V$ אזי מתקיים $\dim(A+B) = \dim(A) + \dim(B) - \dim(A \cap B) \Longleftarrow A+B$
ניקח בסיס ל־A: $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$
ניקח $b_1 \notin A$ כך ש $b_1 \in B$ ־ אזי $a_1, \ldots, a_n, b_1$ בת"ל.
נמשיך כך, עד b_k כלשהו כך ש־$a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots b_k$ בת"ל (לפי הבנייה)
אזי $\langle a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_k \rangle$ בסיס ל־

סכום ישר

ישנן 2 הגדרות פנימיות (בתוך V) לסכום ישר. יהי V מרחב, ו־A, B תת מרחבים:
1) $V = A \oplus B \Longleftrightarrow A \cap B = 0$
2) $V = A \oplus B \Longleftrightarrow v = a + b; a \in A, b \in B$
ישנה דרך שלישית לסכום ישר (חיצונית)
3) $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$ ונניח A, B מרחבים לינאריים, אזי $A \times B$ גם מרחב לינארי. A

שיעור 9

משפט:

יהיו A, B מטריצות, אזי $rk(AB) = \min(rk(A), rk(B))$

משפט:

תהי מטריצה $A \in M_n(\mathbb{F})$ ומרחב ווקטורי L אזי $\dim L = n - rk(A)$