לוגיקה מתמטית

מבוסס על תרגולים של יפית נתני, אוניברסיטת בר־אילן 2013.

אתר הקורס: (מודל lemida.biu.ac.il) , $yafitk6@walla.co.il$ ־ הגשת תרגילים לתא 32 (מתמטיקה)

שיעור 1

תחשיב הפסוקים

הגדרה: פסוק הוא כל משפט שהוא אמיתי או שקרי, אך לא שניהם.

הפסוק הבסיסי ביותר יקרא משתנה פסוקי ומסומן ע"י אות אנגלית. ישנם 2 קבועים פסוקיים והם מסומנים ע"י T - אמת ו-F שקר. משתנים פסוקיים וקבועים פסוקיים נקראים גם - פסוקים אטומים. פסוק מורכב נוצר ע"י שילוב של פסוקים אטומיים וקשרים לוגיים אשר מחברים ביניהם.

דוגמה: "הוא אוכל" - פסוק אטומי.

"הוא אוכל <u>וגם</u> שותה" - פסוק מורכב.

קשרים לוגיים

קשר השלילה מסומן ע"י $\neg$, $\sim$. טבלת האמת שלו (p פסוק)

p	$\neg p$
T	F
F	T

הקשר "וגם" - מסומן ע"י $\wedge$.

הקשר "או" - מסומן ע"י $\vee$.

הקשר "או אקלוסיבי (XOR)" - מסומן ע"י $\oplus$.

קשר הגרירה - מסומן ע"י $\longrightarrow$.

הקשר "אם ורק אם" (אמ"ם) - מסומן ע"י $\longleftrightarrow$.

טבלת אמת של כל הנ"ל:

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \oplus Q$	$P \longrightarrow Q$	$P \longleftrightarrow Q$
T	T	T	T	F	T	T
T	F	F	T	T	F	F
F	T	F	T	T	T	F
F	F	F	F	F	T	T

שקילות לוגית

יהיו A, B פסוקים, מסמנים שקילות לוגית כך: $A \equiv B$. שני פסוקים שקולים אם יש להם אותה טבלת אמת.

דוגמה: נראה כי $P \longrightarrow Q \equiv (P \wedge \neg Q) \longrightarrow \neg P$

הוכחה:

P	Q	$P \longrightarrow Q$	$\neg Q$	$P \wedge \neg Q$	$\neg P$	$(P \wedge \neg Q) \longrightarrow \neg P$
T	T	T	F	F	F	T
T	F	F	T	T	F	F
F	T	T	F	F	T	T
F	F	T	T	F	T	T

הוכחת משפטים

יש כמה דרכים מרכזיות להוכיח משפט מהצורה $P \longrightarrow Q$.

דרך 1: ישירות. כלומר, מניחים שהנתון P מתקיים ובעזרתו ותוך שימוש במשפטים אחרים במתמטיקה הידועים כנכונים, מוכיחים שגם המסקנה Q נכונה.

לדוגמא: יהיו x, y שני מס' טבעיים. נוכיח שאם x ו־y שניהם מספרים זוגיים (זוהי הטענה P) אזי $x + y$ זוגי (זוהי הטענה Q).

הוכחה: נתון ש־x, y מס' זוכיים. לכן, (מהגדרת זוגי) קיימים מס' טבעיים a, b כך ש־$x = 2a, y = 2b$ נחבר את המספרים ונקבל $x + y = 2a + 2b = 2(a + b)$ ולכן גם $x + y$ מס' זוגי.

דרך 2: צורת $contra - positive$

מוכיחים את הפסוק $\neg Q \longrightarrow \neg P$. ניתן להוכיח שמתקיים $P \longrightarrow Q \equiv \neg Q \longrightarrow \neg P$, לכן מספיק להוכיח ש: $\neg Q \longrightarrow \neg P$ נכון.

לדוגמא: יהיו n, m שני מס' טבעיים. נוכיח שאם $n \cdot m$ הוא מספר אי זוגי (זוהי הטענה P) אזי n ו m שניהם מס' אי זוגיים (זוהי הטענה Q).

הוכחה: נניח כי $\neg Q$ נכון. כלומר, n, m אינם שניהם מס' אי זוגיים, כלומר לפחות אחד מהם זוגי. במקרה כזה המכפלה $n \cdot m$ היא כמובן זוגית. כלומר, $\neg P$ נכון.

דרך 3:

הוכחה בדרך השלילה: מוכיחים את הפסוק $(P \wedge \neg Q) \longrightarrow \neg P$. תחילה מניחים כי הנתון P מתקיים ומניחים בשלילה שהמסקנה Q איננה מתקיימת, כלומר מניחים שהפסוק $P \wedge \neg Q$ נכון. כעת, מנסים להוכיח שבמקרה זה, בהכרח נקבל כי ההנחה P אינה נכונה ונקבל סתירה להנחה ש־P מתקיים.

דוגמא: יהיו x, y שני מס' ממשיים. נוכיח שאם $x > y$ ו־$x^2 < y^2$ (זוהי הטענה P) אזי $y < 0$ (זוהי הטענה Q).

הוכחה בדרך השלילה: נניח ש־$x > y$ ו־$x^2 < y^2$ ונניח כי $y \geq 0$. לכן, $x > y \geq 0$, כלומר x ו־ yשניהם מס' אי שליליים ולכן $x^2 > y^2$ בסתירה להנחה ש־$x^2 < y^2$.

שיעור 2

היכרות עם השפה הפורמלית של תחשיב הפסוקים

הסימנים של שפת תחשיב הפסוקים הם:

1. פסוקים יסודיים (אטומיים) ־ קבוצה זו כוללת את הסימנים: $P_0, P_1, \ldots, P_n$ או אותיות גדולות באנגלית.
2. קבועים לוגיים:
   (א) קשרים דו־מקומיים $\overset{\text{גרירה כפולה}}{\longleftrightarrow}, \overset{\text{גרירה}}{\longrightarrow}, \overset{\text{או}}{\vee}, \overset{\text{וגם}}{\wedge}$
   (ב) קשר חד מקומי: שלילה:$\neg$ (או: $\sim$)
   (ג) סוגר שמאלי וסוגר ימני:),(

כל סדרה סופית של סימנים של השפה מכונה **ביטוי**, כגון: $(P_0) \longrightarrow$.

בתוך כלל הביטויים נבחין בקבוצה חלקית של ביטויים, שלהם נקרא "**פסוקים**". הפסוקים הם הביטויים היחידם של השפה הפורמלית להם נייחס משמעות. הפסוקים יהיו הפסוקים היסודיים, ומה שמתקבל מהם ע"י הפעלה אחת או יותר של קשרים ואלו בלבד. כך למשל, הביטוי $P_0 \longrightarrow$ לא יסמן פסוק פורמלי, לעומת זאת הפסוק $P_0 \longrightarrow P_1$ יסמן פסוק.

נתבונן בביטוי: $\phi = (P \longrightarrow (\neg Q)) \vee (\neg (R \longleftrightarrow Q))$.

דרך נוחה לתיאור האופן שבו מתקבל פסוק זה מהפסוקים היסודיים המופיעים בו היא דיאגרמה הנקראת גם "**עץ הבנייה של פסוק**".

עץ הבנייה של הפסוק ϕ הוא:

(TODO//הכנס עץ פה)

הגדרה 1: עץ G אשר בצמתיו יושבים ביטויים של שפת תחשיב הפסוקים, ייקרא **עץ בנייה** אם לכל צומת של G יש לכל היותר שני בנים, ומתקיימים התנאים כדלהלן ביחס לביטויים היושבים בצמתים של G:

1. אם x הוא עלה של G, אז ב־x יושב פסוק יסודי.
2. אם לצומת x יש בדיוק בן אחד ב־G, ובבן זה יושב הביטוי ϕ, אז בצומת x יושב הביטוי $\neg\phi$.
3. אם לצומת x יש בדיוק שני בנים ב־G, ואם בראשון יושב הביטוי ψ ובשני יושב הביטוי π, אז בצומת x יושב אחד מארבעת הבטויים הבאים: $\begin{matrix} \psi \wedge \pi \\ \psi \vee \pi \\ \psi \longrightarrow \pi \\ \psi \longleftrightarrow \pi \end{matrix}$.

הגדרה 2: ביטוי ϕ של שפת תחשיב הפסוקים הוא **פסוק** אסם קיים עץ בניה G אשר ϕ יושב בשורש שלו.

משפט: <u>א.</u> כל פסוק יסודי הוא פסוק.

<u>ב.</u> אם ψ פסוק, אז $\neg(\psi)$ הוא פסוק.

<u>ג.</u> אם ϕ ו־ψ הם פסוקים, ואם $\Box$ הוא סימן קשר דו־מקומי[1], אז $(\phi)\Box(\psi)$ הוא פסוק.

על מנת להוכיח תכונות של פסוקים עלינו להשתמש באינדוקציה.

---

[1] אחד מארבעת הסימנים $\wedge, \vee, \longrightarrow, \longleftrightarrow$

משפט האינדוקציה על בניית פסוק:

תהי $*$ תכונה של ביטויים, כך שמתקיים:

<u>א.</u> כל פסוק יסודי ניחן בתכונה $*$.

<u>ב.</u> אם הפסוק ψ ניחן בתכונה $*$, אז גם $\neg(\psi)$ ניחן בה

<u>ג.</u> אם הפסוקים ϕ, ψ ניחן בתכונה $*$, אז גם הפסוקים $\begin{matrix} \phi \wedge \psi \\ \phi \vee \psi \\ \phi \longrightarrow \psi \\ \phi \longleftrightarrow \psi \end{matrix}$ ניחנו בה.

תחת הנחות אלו מתקיים: כל פסוק ניחן בתכונה $*$.

דוגמא

משפט: בכל פסוק מס' הסוגריים השמאליים שווה למספר הסוגריים הימניים.

הוכחה: נוכיח את משפט זה באינדוקציה על בניית הפסוק.

התכונה היא שוויון בין מס' הסוגריים השמאליים לימניים.

<u>בסיס:</u> כל פסוק יסודי ניחן בתכונה זו כי בפסוק יסודי אין כלל סוגריים, לכן מס' הסוגריים הימניים = מס' הסוגריים השמאליים = 0.

<u>הנחה:</u> נניח שבפסוק ψ יש אותו מס' של סוגריים ימניים ושמאליים, נסמן מס' זה ב־n.

<u>צעד:</u> בפסוק $\neg(\psi)$ יש $n+1$ סוגריים שמאליים ו־$n+1$ סוגריים ימניים ולכן שוויון.

<u>הנחה:</u> נניח שבפסוק ϕ יש אותו מס' של סוגריים ימניים ושמאליים, נניח־n, וגם ב־ψ יש מס' שווה של סוגריים ימניים ושמאליים, נניח m.

<u>צעד:</u> בפסוק $(\phi)\,\Box\,(\psi)$, מס' הסוגריים הימניים והשמאליים הוא $n+m+2$ ושוב יש שוויון. לכן לפי משפט האינדוקציה, בכל פסוק מס' הסוגריים הימניים שווה לשמאליים.

שיעור 3

משפט הקריאה היחידה

לכל פסוק ϕ מתקיימת אחת ורק אחת מהאפשרויות הבאות:

1. ϕ פסוק יסודי.
2. ϕ הוא $\sim(\psi)$ עבור פסוק מסויים ψ.
3. ϕ הוא $(\alpha)\,\Box\,(\beta)$, כאשר $\Box$ הוא אחד מסימני הקשרים הדו־מקומיים $(\wedge, \vee, \longrightarrow, \longleftrightarrow)$ ו־α, β פסוקים.

ההצגה הנ"ל של פסוקים היא יחידה, כלומר, במקרה 2 הפסוק ψ נקבע באופן יחיד ע"י ϕ, ובמקרה 3 הפסוקים α, β והסימן $\Box$, נקבעים באופן יחיד ע"י ϕ.

הוכחת משפט הקריאה היחידה:

1. יהי ϕ פסוק ויהיה G עץ בנייה של ϕ, כלומר, ϕ יושב בשורש של G. אם לשורש העץ G אין בנים, אז הוא עלה, ומהגדרת עץ בנייה, יושב בשורש העץ פסוק יסודי ולכן ϕ הוא פסוק יסודי.
אם לשורש העץ יש בן אחד, אז לפי הגדרת עץ בנייה $\phi = \sim(\psi)$, כאשר ψ הפסוק היושב בצומת הבן.
אם לשורש העץ יש 2 בנים ובהם יושבים הפסוקים α, β אז לפי הגדרת עץ בנייה $\phi = (\alpha)\square(\beta)$, כאשר $\square$ הוא סימן קשר דו־מקומי.
בכך הוכחנו כי כל פסוק ϕ הוא אכן בעל אחת מ־3 הצורות שבמשפט ולא בצורה אחרת.

2. כעת נעבור להוכחת היחידות:
ראשית, ברור כי פסוק ϕ לא יכול להשתייך בעת ובעונה אחת ל־2 מבין המשפחות $1, 2, 3$ וזאת רואים ע"י בחינת הסימן הראשון ב־ϕ:
לפסוקים ממשפחה 1 סימן זה הוא פס' יסודי (אות).
לפסוקים ממשפחה 2 סימן זה הוא ~.
לפסוקים ממשפחה 3 סימן זה הוא).

3. להשלמת הוכחת היחידות נותר להראות שאין ל־ϕ 2 הצגות שונות מאותו טיפוס:

(א) אם ϕ הוא פסוק יסודי, ברור שאין לו יותר מהצגה אחת (מכיוון שאם $n \neq m$, אז $P_n \neq P_m$, ולא יתכן ש־ϕ הוא P_n וגם P_m בבת אחת).

(ב) אם $\phi = \sim(\psi)$ וגם $\phi = \sim(\psi')$ אז עבור שני הערכים ψ ו־ψ', הם למעשה הביטוי המתקבל מ־ϕע"י השמטת הסימנים $\sim, (,)$.

(ג) עבור ϕ שהוא מהטיפוס השלישי, נניח שיש 2 הצגות: $\phi = (\alpha')\square'(\beta')$, $\phi = (\alpha)\square(\beta)$
עלינו להראות כי $\square$ ו־$\square'$ הם אותו סימן קשר, וכן שמתקיימים השוויונות $\beta = \beta', \alpha = \alpha'$
נראה תחילה שהביטויים α ו־α' הם בעלי אותו אורך:
נניח בשלילה שהם לא, בה"כ α קצר מ־α'. כיוון ששני הפסוקים α, α' מתחילים בסימן השני של ϕ פירוש הדבר הוא ש־$(\alpha$ הוא התחלה של α' או שווה לו.
טענת עזר: לכל פסוק ϕ מתקיים: בכל התחלה של ϕ, מס' הסוגריים השמאליים גדול או שווה למספר הסוגריים הימניים.
כעת נספור סוגריים: α הוא פסוק, ולכן קיים שוויון בין מס' הסוגריים הימניים לשמאליים, לכן בביטוי $(\alpha$, מס' הסוגריים הימניים גדול ממס' הסוגריים השמאליים.
לעומת זאת, ביטוי זה הוא התחלה של הפסוק α' ולכן מס' הסוגריים הימניים צריך להיות <u>קטן או שווה</u> למס' הסוגריים השמאליים. **סתירה.**
לכן, α, α' הם באותו אורך, ובאותו אופן גם β, β' הם באותו אורך.
נסמן ב־n את האורך של α ושל α' ונסמן ב־m את האורך של β ושל β'. $\phi = (\alpha)\square(\beta)$ ולכן האורך של ϕ הוא $n + m + 5$. $\square$ ו־$\square'$ חייבים להיות בעלי אותו סימן, מכיוון ששניהם הוא הסימן המופיע במקום ה־$n + 3$ של ϕ.
α ו־α' חייבים להיות אותו פסוק, שכן שניהם מורכבים מהסימן ה־2 ועד $n + 1$ של ϕ.
β ו־β' חייבים להיות אותו פסוק, שכן שניהם מורכבים מהסימנים ה־$n + 5$ ועד $n + m + 4$ של ϕ.

שיעור 4

קבוצה שלמה של קשרים

הגדרה: "קבוצה שלמה של קשרים" היא קבוצת קשרים, שבעזרתם ניתן לבנות כל פסוק.

משפט: הקבוצה $\{\sim, \wedge, \vee, \longrightarrow, \longleftrightarrow\}$ היא קבוצה שלמה של קשרים.

תרגיל 1: הוכח שקבוצת הקשרים $\{\sim, \vee, \wedge\}$ היא שלמה.

הוכחה: מספיק להוכיח לפי המשפט שניתן לבטא את $\longrightarrow, \longleftrightarrow$ באמצעות $\{\sim, \wedge, \vee\}$ [2]

$$P_1 \longrightarrow P_2 \equiv (\sim P_1) \vee P_2$$

$$P_1 \longleftrightarrow P_2 \equiv (P_1 \longrightarrow P_2) \wedge (P_2 \longrightarrow P_1) \equiv ((\sim P_1) \vee P_2) \wedge ((\sim P_2) \vee P_1)$$

תרגיל 2: הוכח שקבוצת הקשרים $\{\sim, \longrightarrow\}$ היא שלמה.

הוכחה: מספיק להוכיח שניתן לבטא את $\wedge, \vee$ באמצעות $\{\sim, \longrightarrow\}$ (נובע מהתרגיל הקודם).

$$P_1 \vee P_2 \equiv (\sim P_1) \longrightarrow P_2$$

$$P_1 \wedge P_2 \underbrace{\equiv}_{\text{דה מורגן}} \sim ((\sim P_1) \vee (\sim P_2)) \equiv \sim ((\sim (\sim P_1)) \longrightarrow (\sim P_2))$$

תרגיל 3: הוכח שקבוצת הקשרים $\{\sim, \wedge\}$ היא שלמה.

הוכחה: מספיק להוכיח שניתן לבטא את $\vee$ באמצעות $\{\sim, \wedge\}$:

$$P_1 \vee P_2 \underbrace{\equiv}_{\text{דה מורגן}} \sim ((\sim P_1) \wedge (\sim P_2))$$

תרגיל 4: הוכח שקבוצת הקשרים $\{\sim, \vee\}$ היא שלמה.

הוכחה: מספיק להוכיח שניתן לבטא את $\wedge$ באמצעות $\{\sim, \vee\}$:

$$P_1 \wedge P_2 \underbrace{\equiv}_{\text{דה מורגן}} \sim ((\sim P_1) \vee (\sim P_2))$$

תרגיל 5: הוכח שקבוצת הקשרים $\{\sim, \longleftrightarrow\}$ <u>איננה</u> שלמה.

---

[2] בתרגיל יש להוכיח בעזרת טבלת אמת.

הוכחה: ראינו בתרגיל 3 שקבוצת הקשרים $\{\sim, \wedge\}$ היא שלמה.

לכן, מספיק להוכיח שבשפה הנוצרת ע"י $\{\sim, \longleftrightarrow\}$, אין פסוק השקול ל־$P_1 \wedge P_2$.

נניח בשלילה שיש פסוק ϕ כנ"ל[3], המקיים $\phi \equiv P_1 \wedge P_2$, ונגיע לסתירה.

נניח בה"כ כי בפסוק ϕ הנ"ל מופיעים הפסוקים היסודיים P_1 ו־P_2 והם בלבד, לכן לוח האמת של ϕ הוא בן 4 שורות.

נוכיח שהוא בעל התכונה: מס' ההופעות של T בעמודה של ϕ בלוח זה הוא זוגי $(0, 2, 4)$.

לכן, $\phi \not\equiv P_1 \wedge P_2$, כי בלוח האמת של $P_1 \wedge P_2$ יש הופעה יחידה של T בעמודה של $P_1 \wedge P_2$.

אנו נוכיח תכונה זו עבור כל הפסוקים בשפה הנוצרת ע"י $\{\sim, \longleftrightarrow\}$, הבנויים מהפסוקים היסודיים P_1, P_2 .

ההוכחה היא באינדוקציה על בניית הפסוק:

עבור פסוק יסודי (P_1 או P_2) התכונה מתקיימת כי T מופיע 2 פעמים מתוך 4:

P_1	P_2	$\dots$
T	T	
T	F	
F	T	
F	F	

הנחת האינדוקציה: נניח שהתכונה מתקיימת עבור הפסוקים α, β.

צעד האינדוקציה: נוכיח כי הטענה מתקיימת עבור $\sim \alpha$, $\alpha \longleftrightarrow \beta$ (אלו האפשרויות היחידות לבנות פסוקים מורכבים בשפה הנוצרת ע"י $\{\sim, \longleftrightarrow\}$).

לגבי $\sim \alpha$:

בלוח האמת של α מס' המופעים של T הוא זוגי, לכן מספר המופעים של F הוא זוגי (יש מס' זוגי של שורות).

מכאן מספר מופעי T בלוח האמת של $\sim \alpha$ הוא גם זוגי.

לגבי $\alpha \longleftrightarrow \beta$: קיימות האפשרויות הבאות:

מקרה 1: אם אחד מהם (α או β) הוא טאוטולוגיה (4 מופעי T) , אז הפסוק כולו שקול לפסוק השני, ובמקרה זה כבר טיפלנו בהנחת האינדוקציה. דוגמה:

α	β	$\alpha \longleftrightarrow \beta$
T	T	T
T	F	F
T	T	T
T	F	F

מקרה 2: אם אחד מהם (α או β) הוא סתירה (4 מופעי F) , אז הפסוק כולו שקול לשלילת הפסוק השני, ובמקרה זה כבר טיפלנו ב־($\sim \alpha$). דוגמה:

α	β	$\alpha \longleftrightarrow \beta$
F	T	F
F	F	T
F	T	F
F	F	T

[3] ϕ מורכב רק מהקשרים $\sim$ ו־$\longleftrightarrow$

אחרת: בכל אחד מלוחות האמת יש בדיוק 2 הופעות של T, כאן קיימות 3 האפשרויות הבאות:

אפשרות א': מול כל T בלוח של α מופיע F בלוח של β.

אפשרות ב': מול כל T בלוח של α מופיע T בלוח של β.

אפשרות ג': יש T יחיד של α שמולו יש T בלוח של β.

בכל אחד מהמקרים הנ"ל, מס' הופעות T בלוח של $\beta \longleftrightarrow \alpha$ הוא זוגי.

נצייר את 3 האפשרויות:

מקרה א':

α	β_	$\alpha \longleftrightarrow \beta$
T	F	F
T	F	F
F	T	F
F	T	F

מקרה ב':

α	β_	$\alpha \longleftrightarrow \beta$
T	T	T
T	T	T
F	F	T
F	F	T

מקרה ג':

α	β_	$\alpha \longleftrightarrow \beta$
T	F	F
T	T	T
F	F	T
F	T	F

נשים לב ששוב קיבלנו בכל טבלת אמת מס' זוגי של - T.

לכן, לא קיים פסוק ϕ בשפה הנוצרת ע"י $\{\sim, \longleftrightarrow\}$ השקול לפסוק $P_1 \wedge P_2$ ולכן מערכת הקשרים אינה שלמה.

שיעור 5

מערכת היסק

הגדרה: מערכת ההיסק Υ_1 היא מערכת ההיסק האשר האקסיומות הלוגיות שלה הן כל הפסוקים מהצורות הבאות:

1. $(\Omega_1) : \alpha \longrightarrow (\beta \longrightarrow \alpha)$
2. $(\Omega_2) : (\alpha \longrightarrow (\beta \longrightarrow \gamma)) \longrightarrow ((\alpha \longrightarrow \beta) \longrightarrow (\alpha \longrightarrow \gamma))$
3. $(\Omega_3) : ((\sim \beta) \longrightarrow (\sim \alpha)) \longrightarrow (((\sim \beta) \longrightarrow \alpha) \longrightarrow \beta)$

וכלל ההיסק היחיד שלה הוא $M.P$, שה א $\frac{\alpha, \alpha \longrightarrow \beta}{\beta}$.

הגדרה: תהי Υ_1 מערכת היסק ו־Γ קבוצת פסוקים. **הוכחה** של α מתוך Γ ב־Υ_1 היא סדרה סופית של פסוקים, אשר כל אחד מהם הוא אקסיומה לוגית או פסוק מתוך Γ, או מתקבל מפסוקים קודמים בסדרה באמצעות כלל היסק MP. מסמנים זאת כך: $\Gamma \vdash \alpha$

משפט הדדוקציה

אם Γ קבוצת פסוקים ו־α, β הם פסוקים אזי:

$\Gamma \vdash \alpha \longrightarrow \beta$ אםם $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$.

כלומר, במקום להוכיח ש־$\Gamma \vdash \alpha \longrightarrow \beta$, מניחים את α ורק צריך להוכיח את β.

תרגיל 1

הוכח: $\Gamma=\{\alpha\longrightarrow(\beta\longrightarrow\gamma),\beta\}\vdash\alpha\longrightarrow\gamma$

הוכחה: ע"פ משפט הדדוקציה, נוכיח $\Gamma=\{\alpha\longrightarrow(\beta\longrightarrow\gamma),\beta\}\cup\{\alpha\}\vdash\gamma$

אזי $\frac{\alpha,\alpha\longrightarrow(\beta\longrightarrow\gamma)}{(\beta\longrightarrow\gamma)}$. כעת, מתקיים גם $\frac{\beta,(\beta\longrightarrow\gamma)}{\gamma}$. וקיבלנו את γ כנדרש.

לכן $\Gamma=\{\alpha\longrightarrow(\beta\longrightarrow\gamma),\beta\}\cup\{\alpha\}\vdash\gamma$ וזה אםם $\Gamma=\{\alpha\longrightarrow(\beta\longrightarrow\gamma),\beta\}\vdash\alpha\longrightarrow\gamma$ ע"פ דדוקציה.

נוכיח בדרך יותר פורמלית, לצורך כתיבת תשובה:

ע"פ משפט הדדוקציה נוסיף את α להנחות.

$$\begin{array}{ll}\alpha_1=\alpha\longrightarrow(\beta\longrightarrow\gamma) & (\in\Gamma\cup\{\alpha\})\\ \alpha_2=\beta & (\in\Gamma\cup\{\alpha\})\\ \alpha_3=\alpha & (\in\Gamma\cup\{\alpha\})\\ \alpha_4=\beta\longrightarrow\gamma & (MP\alpha_3\alpha_1)\\ \alpha_5=\gamma & (MP\alpha_2\alpha_4)\end{array}$$

כלומר, $\Gamma\cup\{\alpha\}\vdash\gamma$ לכן $\Gamma\vdash\alpha\longrightarrow\gamma$, מש"ל.

הערה: אם פסוק מסויים כבר הוכח, ניתן להשתמש בו בהוכחה של כל משפט אחר.

הגדרה: פסוק α ייקרא משפט אם יש לו הוכחה.

למשל: $\alpha\longrightarrow\alpha$

תרגיל 2

הוכח שהפסוקים הבאים הם משפטים:

1. $(\sim(\sim\alpha))\longrightarrow\alpha$
2. $\alpha\longrightarrow(\sim(\sim\alpha))$

הוכחה: נראה כמו בתרגיל קודם.

$\alpha_1=((\sim\alpha)\longrightarrow(\sim(\sim\alpha)))\longrightarrow(((\sim\alpha)\longrightarrow(\sim\alpha))\longrightarrow\alpha)$ — (Ω_3) כאשר α~מחליף את α ו־α מחליף את β

$\alpha_2=(\sim\alpha)\longrightarrow(\sim\alpha)$ — משפט $\alpha\longrightarrow\alpha$ כאשר $\sim\alpha$ מחליף את α

$\alpha_3=((\sim\alpha)\longrightarrow(\sim(\sim\alpha)))\longrightarrow\alpha$ — לפי תרגיל 1 מ־α_1 ו־α_2

$\alpha_4=(\sim(\sim\alpha))\longrightarrow((\sim\alpha)\longrightarrow(\sim(\sim(\alpha))))$ — (Ω_1) כאשר $(\sim\alpha)$~מחליף את α ו־$(\sim\alpha)$ מחליף את β

$\alpha_5=(\sim(\sim\alpha))\longrightarrow\alpha$ — כלל הטרנזיטיביות מ־α_3,α_4

מש"ל סעיף א'.

ב': מוכיחים באמצעות Ω_3 , $(\sim\alpha)\sim$ מחליף את β , סעיף א' $(\sim\alpha)$ מחליף את α

MP

Ω_1

וכלל הטרנזיטיביות.

$\{\beta,\alpha\longrightarrow(\beta\longrightarrow\gamma)\}\vdash(\alpha\longrightarrow\gamma)$

תרגיל 3

לכל α ו־β הוכח:

$(\alpha \longrightarrow \beta) \longrightarrow (\sim \alpha)$ הוא משפט.

הוכחה: $(\alpha \longrightarrow \beta) \longrightarrow (\sim \alpha) \vdash \emptyset$ ולפי דדוקציה:$(\alpha \longrightarrow \beta) \vdash \alpha \sim$ ולפי דדוקציה:$\beta \vdash \underbrace{\sim \alpha, \alpha}_{\Gamma}$.

נוכיח:

$$
\begin{array}{ll}
\alpha_1 =\sim \alpha & (\in \Gamma) \\
\alpha_2 = \alpha & (\in \Gamma) \\
\alpha_3 = \alpha \longrightarrow ((\sim \beta) \longrightarrow \alpha) & \Omega_1 \text{ , מחליפים את } \beta \text{ ב־}(\sim) \\
\alpha_4 = (\sim \alpha) \longrightarrow ((\sim \beta) \longrightarrow (\sim \alpha)) & (\Omega_1) \text{ , מחליפים את } \alpha \text{ ב־}(\sim \alpha) \text{ ואת } \beta \text{ ב־}(\sim \beta) \\
\alpha_5 = (\sim \beta) \longrightarrow \alpha & (MP\alpha_2\alpha_3) \\
\alpha_6 = (\sim \beta) \longrightarrow (\sim \alpha) & (MP\alpha_1\alpha_4)
\end{array}
$$

תרגיל 4

הוכח:

1. $\vdash ((\sim \beta) \longrightarrow (\sim \alpha)) \longrightarrow (\alpha \longrightarrow \beta)$
2. $\vdash (\alpha \longrightarrow \beta) \longrightarrow ((\sim \beta) \longrightarrow (\sim \alpha))$

הוכחה:

א. נוכיח לפי משפט הדדוקציה ש: $\Gamma = \{(\sim \beta) \longrightarrow (\sim \alpha), \alpha\} \vdash \beta$

פתרון: נפעיל פעמיים את משפט הדדוקציה ונקבל $((\sim \beta) \longrightarrow (\sim \alpha)), \alpha \vdash \beta$

$$
\begin{array}{ll}
\alpha_1 = (\sim \beta) \longrightarrow (\sim \alpha) & \Gamma \\
\alpha_2 = \alpha & \Gamma \\
\alpha_3 = ((\sim \beta) \longrightarrow (\sim \alpha)) \longrightarrow ((\sim \beta) \longrightarrow \alpha) \longrightarrow \beta & \Omega_3 \\
\alpha_4 = ((\sim \beta) \longrightarrow \alpha) \longrightarrow \beta & (MP\alpha_3\alpha_1) \\
\alpha_5 = \alpha \longrightarrow ((\sim \beta) \longrightarrow \alpha) & \Omega_1 \\
\alpha_6 = (\sim \beta) \longrightarrow \alpha & (MP\alpha_5\alpha_2) \\
\alpha_7 = \beta & (MP\alpha_6\alpha_4)
\end{array}
$$

מש"ל.

ב.

מוכיחים באמצעות תרגיל 2 א' , כלל הטרנזיטיביות, סעיף א' ו־MP:

שיעור 6

לוגיקה מסדר ראשון

הגדרה: השפה המלאה של תחשיב היחסים שתסומן $\prod$, מכילה את הסימנים הבאים:

1. **משתנים:** x_n לכל n טבעי.
2. **קבועים:** a_n לכל n טבעי.
3. **פרדיקטים:** A_n^m לכל n,m טבעיים.
4. **פונקציות:** f_n^m לכל n,m טבעיים.
5. סוגר שמאלי - "$)$" סוגר ימני - "$($" ופסיק "$,$".
6. **קשרים:** $\sim,\longrightarrow$
7. כמת כולל: $\forall$

הערה: הכמת $\exists x_n\left(\alpha\right)$ (קיים x_n כך שמתקיים α) מייצג את התבנית $\sim\left(\forall x_n\left(\sim\alpha\right)\right)$ (לא לכל x_n לא α).

שפות חלקיות ל־$\prod$

נגדיר שפה L_0 המכילה את הסימנים הבאים:

1. כל המשתנים.
2. שני קבועים: a_1,a_2 . (בכתיב לא פורמלי נשתמש בסימון 0 במקום a_1 ו־1 במקום a_2)
3. שתי פונקציות: f_1^2 שתסמן חיבור ו־f_2^2 שתסמן כפל.
4. פרדיקט אחד - A_1^2 שיסמן $=$.
5. שני הסוגרים, הפסיק , הקשרים $\left(\sim,\longrightarrow\right)$ והכמת הכולל $\forall$.

דוגמאות

1. במקום הביטוי הפורמלי $A_1^2\left(x_1,a_2\right)$ נקבל את הביטוי הלא פורמלי $x_1=1$.
2. במקום הביטוי הפורמלי $f_1^2\left(a_2,x_1\right)$ נקבל את הביטוי הלא פורמלי $1+x_1$.
3. במקום הביטוי הפורמלי $A_1^2\left(f_2^2\left(x_1,x_2\right),a_1\right)$ נקבל את הביטוי הלא פורמלי $x_1\cdot x_2=0$.

השפה L_0 מתארת בין השאר את המס' השלמים עם פעולות חיבור וכפל ומסמנים אותה גם כך: $\left(\mathbb{Z},0,1,+,\cdot\right)$

L_1

שפה חלקית אחרת של $\prod$ היא השפה L_1, אשר סימניה הם כל המשתנים, שני הפרדיקטים A_1^2 שיסמן $=$ ו־A_2^2 שיסמן $<$.

כמו כן, שני הסוגרים, הפסיק הקשרים והכמת הכולל. (אין קבועים או פונקציות).

שפה זו מתאימה לתיאור הקבוצה הסדורה של המס' השלמים עם היחס $<$, כלומר: $\left(\mathbb{Z},<\right)$.

לדוגמה: במקום התבנית הפורמלית: $\left(A_2^2\left(x_1,x_2\right)\right)\longrightarrow\left(A_1^2\left(x_1,x_2\right)\right)$ נקבל את הצורה הלא פורמלית:

$\left(x_1=x_2\right)\longrightarrow\left(x_1<x_2\right)$

אפשר לדבר גם על האיחוד של שפות: $L_0\cup L_1$ כעל שפה המכילה את הסימנים של שתי השפות L_0 ו־L_1.

בשפה זו נוכל לרשום לדוגמה את התבנית: $A_2^2\left(f_1^2\left(x_1,a_2\right),x_2\right)$ שמשמעה $x_1+1<x_2$.

שפה זו מסומנת כך: $L_0\cup L_1=\left(\mathbb{Z},0,1,+,\cdot,<\right)$

תרגיל 1:

בטא בשפה L_0 את חוק החילוף של הכפל.

פתרון:

חוק החילוף הוא $x_1x_2=x_2x_1$, $\forall x_1,\forall_{x_2}$ לכן:

$\forall x_1\left(\forall x_2\left(A_1^2\left(f_2^2\left(x_1,x_2\right),f_2^2\left(x_2,x_1\right)\right)\right)\right)$

הגדרה: **אינטרפטציה** של השפה היא התאמה של איברים, פעולות או יחסים לסימני השפה, למעט המשתנים, הקשרים, הכמת הכולל, הסוגריים והפסיק.

לדוגמה: ב־L_0 פירשנו את הקבועים a_1,a_2 להיות $0,1$, את הפונקציות f_2^2,f_1^2 להיות חיבור וכפל, והפרדיקט A_1^2 התפרש כשוויון.

זוהי אינטרפרטציה של השפה L_0, תחום האינטרפרטציה הוא $\mathbb{Z}$.

הגדרה: יהיו L שפה בתחשיב הפרדיקטים, ו־J אינטרפרטציה של L.

השמה אל J היא פונקציה מקבוצה חלקית של קבוצת המשתנים אל תחום האינטרפרטציה.

כגון: בשפה L_0 נסתכל בהשמה α הבאה: $\alpha:\{x_3,x_4,x_5,x_6\}\longrightarrow\mathbb{Z}$

כך ש: $\begin{array}{c}\alpha\left(x_3\right)=5\\ \alpha\left(x_4\right)=2\\ \alpha\left(x_5\right)=6\\ \alpha\left(x_6\right)=3172\end{array}$. בהשמה α זו, ערכו של הביטוי $f_2^2\left(f_1^2\left(x_3,x_4\right),x_5\right)$ הוא $(5+2)\cdot 6=42$

דוגמה נוספת ־ התבנית $A_1^2\left(f_2^2\left(x_3,x_3\right),x_4\right)$ תקבל את הערך F כי $5\cdot 5\neq 2$

תרגיל 2:

חשבו את ערכו של הביטוי $f_2^2\left(f_1^2\left(x_1,x_2\right),x_3\right)$ באינטרפרטציה שתיארנו לעיל, ע"י ההשמה $\alpha\left(x_n\right)=n$ לכל n.

פתרון:

$(1+2)\cdot 3=9$

שיעור 7

משתנה קשור ומשתנה חופשי

הגדרה: הופעה של משתנה x_n בתבנית נתונה היא הופעה **קשורה** אסם הופעה זו היא לימין $\forall$, או שהיא בטווח הפעולה של $\forall x_n$.

בכתיבה לא פורמלית, ההופעה קשורה גם אם x_n הוא מיד לימין $\exists$ או שהוא בטווח הפעולה של $\exists x_n$.

כל הופעה אחרת של x_n היא הופעה **חופשית**.

דוגמה

$$\underbrace{\exists x_2}_{\text{ק}}\left(\underbrace{\forall x_1}_{\text{ק}}\left(A_2^3\left(\underbrace{f_1^1\left(x_2\right)}_{\text{ק}},\underbrace{x_3}_{\text{ח}},\underbrace{x_1}_{\text{ק}}\right)\right)\right)\longrightarrow\left(\underbrace{\forall x_3}_{\text{ק}}\left(A_1^1\left(\underbrace{x_1}_{\text{ח}}\right)\right)\right)$$

כשרות להצבה

הגדרה: אם נתונה תבנית α שמופיע בה x כמשתנה חופשי ונתונה תבנית t, **הצבה** של t במקום x ב־α היא החלפת כל הופעה <u>חופשית</u> של x ב־t.

הגדרה: יהיו α תבנית, x_n משתנה המופיע ב־α ו־t תבנית נוספת. t ייקרא **כשר להצבה** ב־α במקום x_n, אם אין ל־x_n הופעה חופשית ב־α בטווח של $\forall x_k$, כאשר x_k מופיע ב־t.

דוגמאות

1. המשתנה $t=x_2$ אינו כשר להצבה במקום x_1 בתבנית $\alpha=\forall x_2 A_1^2\left(x_1,x_2\right)$, כי x_1 חופשי בטווח הפעולה של $\forall x_2$.
2. בתבנית $\alpha=\left(A_3^2\left(\underbrace{x_1}_{\text{ח}},\underbrace{x_5}_{\text{ח}}\right)\right)\longrightarrow\left(\forall x_5 A_4^3\left(\underbrace{x_3}_{\text{ח}},\underbrace{x_2}_{\text{ח}},\underbrace{x_5}_{\text{ק}}\right)\right)$ ההצבה $t=f_1^3\left(a_1,x_2,x_5\right)$ כשרה להצבה במקום x_1, כי אין ל־x_1 הופעות חופשיות בטווח של $\forall x_2,\forall x_5$, אך היא אינה כשרה להצבה במקום המשתנים x_3 ו־x_2, כי ל־x_2 ו־x_3 יש הופעה חופשית ב־$\forall x_5$.

מערכת היסק בתחשיב היחסים

מערכת ההיסק Υ_1 היא מערכת ההיסק האשר האקסיומות הלוגיות שלה הן כל הפסוקים מהצורות הבאות:

1. $(K_1): \alpha \longrightarrow (\beta \longrightarrow \alpha)$
2. $(K_2): (\alpha \longrightarrow (\beta \longrightarrow \gamma)) \longrightarrow ((\alpha \longrightarrow \beta) \longrightarrow (\alpha \longrightarrow \gamma))$
3. $(K_3): ((\sim \beta) \longrightarrow (\sim \alpha)) \longrightarrow (((\sim \beta) \longrightarrow \alpha) \longrightarrow \beta)$
4. $(K_4): \forall x_1 (\alpha (x_1)) \longrightarrow \alpha (t)$ כאשר t כשר להצבה במקום x_1 ב־α.
5. $(K_5): \forall x_1 (\alpha \longrightarrow \beta) \longrightarrow (\alpha \longrightarrow \forall x_1 \beta)$, אם x_1אינו מופיע חופשי ב־α.
6. (K_6) אקסיומת השוויון.

כללי היסק: $M.P$ ־ מ־α ו־ $\alpha \longrightarrow \beta$ נסיק β.

(כלל ההכללה) GEN ־ מ־α מסיקים את $\forall x_1 \alpha$.

משפט הדדוקציה לתחשיב היחסים (לוגיקה מסדר ראשון)

תהי Γ קבוצת פסוקים, ו־α, β פסוקים.

א. אם $\Gamma \vdash \alpha \longrightarrow \beta$ אז $\Gamma, \alpha \vdash \beta$

ב. אם $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ וקיימת הוכחה של β מתוך $\Gamma \cup \{\alpha\}$, שבה בכל שימוש בכלל ההיסק GEN שבו מסיקים $\forall x_k \gamma$ מ־γ, x_k אינו מופיע חופשי ב־α, אזי $\Gamma \vdash \alpha \longrightarrow \beta$

(כלומר, להעביר שמאלה, אפשר באופן חופשי, אך להעביר ימינה דורשת את התנאים של ב׳).

הוכחה:

א. אם $\Gamma \vdash \alpha \longrightarrow \beta$, אז $\Gamma, \alpha \vdash \alpha \longrightarrow \beta$ (כי אם מוסיפים נתון, זה לא משנה את ההוכחה). לכן, אם מ־Γ ניתן להוכיח ש־$\alpha \longrightarrow \beta$ וגם α נתון אזי לפי $M.P$ $\left(\frac{\alpha, \alpha \longrightarrow \beta}{\beta}\right)$ ניתן להוכיח את β. מכאן, $\Gamma, \alpha \vdash \beta$.

ב. נניח כי $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$. תהי $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ הוכחה של β מתוך $\Gamma \cup \{\alpha\}$ (ונראה כי $\beta = \beta_n$), וכמו כן השימוש ב־GEN מוגבל כאמור לעיל (מתקיימות דרישות סעיף ב׳).

צ"ל: $\Gamma \vdash \alpha \longrightarrow \beta$ נוכיח באינדוקציה על i, שלכל $1 \leq i \leq n$: $\Gamma \vdash \alpha \longrightarrow \beta_i$ (אם $i = n$ אז $\beta_i = \beta_n = \beta$ ואז נקבל $\Gamma \vdash \alpha \longrightarrow \beta$)

מקרה הבסיס: $i = 1$: נתבונן ב־β_1.

β_1 היא אקסיומה לוגית או איבר של $\Gamma \cup \{\alpha\}$. אם $\beta_1 = \alpha$, אזי $\Gamma \vdash (\alpha \longrightarrow \beta_1)$, כי $\alpha \longrightarrow \alpha$ הוא משפט.

אם $\beta_1 \neq \alpha$ אזי β_1 היא אקסיומה לוגית או איבר של Γ (נתונים), לפיכך הסדרה הבאה היא הוכחה של $\alpha \longrightarrow \beta_1$ מתוך Γ :

β_1 (אקסיומה לוגית או איבר של Γ)

$\beta_1 \longrightarrow (\alpha \longrightarrow \beta_1)$ (K_1) מתחשיב הפסוקים

$\alpha \longrightarrow \beta_1$ (MP)

והוכחנו כי $\Gamma \vdash \alpha \longrightarrow \beta_1$.

הנחת האינדוקציה:

נניח ש: $\Gamma \vdash \alpha \longrightarrow \beta_j$ לכל j הקטן מ־i.

צעד האינדוקציה: נוכיח ש: $\Gamma \vdash \alpha \longrightarrow \beta_i$

א. אם β_i אקסיומה לוגית או איבר של $\Gamma \cup \{\alpha\}$, אנו יכולים להראות בדיוק כמו במקרה של β_1 ש־$\Gamma \vdash \alpha \longrightarrow \beta_i$

ב. β_i מתקבל באמצעות $M.P$ משני פסוקים קודמים, האחד מהצורה β_j והאחר מצורה $\beta_j \longrightarrow \beta_i$.

לפי הנחת האינדוקציה $\Gamma \vdash \alpha \longrightarrow \beta_j, \alpha \longrightarrow (\beta_j \longrightarrow \beta_i)$

נתבונן בהוכחה הבאה: $(K_2)\ (\alpha \longrightarrow (\beta_j \longrightarrow \beta_i)) \longrightarrow ((\alpha \longrightarrow \beta_j) \longrightarrow (\alpha \longrightarrow \beta_i))$

הנחת האינדוקציה: $\alpha \longrightarrow (\beta_j \longrightarrow \beta_i)$

לפי $M.P$: $(\alpha \longrightarrow \beta_j) \longrightarrow (\alpha \longrightarrow \beta_i)$

הנחת האינדוקציה: $\alpha \longrightarrow \beta_j$

לפי $M.P$: $\alpha \longrightarrow \beta_i$.

ג. β_i מתקבל באמצעות GEN מ־β_j $(j < i)$ כלומר $\beta_i = \forall x_k \beta_j$, כאשר x_k אינו מופיע חופשי ב־α. לפיכך:

אקסיומה K_5: $\forall x_k (\alpha \longrightarrow \beta_j) \longrightarrow (\alpha \longrightarrow \forall x_k \beta_j)$

1. $\forall x_k (\alpha \longrightarrow \beta_j) \longrightarrow (\alpha \longrightarrow \beta_i)$ לפי הנחת האינדוקציה, $\alpha \longrightarrow \beta_j$, כי $j < i$ לכן:
2. $\forall x_k (\alpha \longrightarrow \beta_j)\ (GEN)$

מ־1 ו־2 נובע ע"י $M.P$: $\alpha \longrightarrow \beta_i$. ולכן $\Gamma \vdash \alpha \longrightarrow \beta_i$

שיעור 8

משפט הקומפקטיות ־ בקובץ

שיעור 9

חזרה למבחן

תרגיל 1 ־ לוגיקה מסדר 1

נתון גרף (S, E) כך ש־S הינם הצמתים ו־E הן הקשתות. ניתן לבטא את העובדה שקיימת קשת בגרף מצומת s לצומת t ע"י $E(s,t)$. חלק מהצמתים בגרף הינם אדומים. נסמן בעזרת הפרדיקט R , כלומר $R(s)$, אם צומת s הינה אדומה. חלק מהצמתים הינם ירוקים ונסמן זאת בעזרת הפרדיקט G, כלומר $G(s)$. כתוב בלוגיקה מסדר ראשון את התכונות הבאות:

א: לכל צומת ירוק יש לפחות שני שכנים אדומים (שונים).

$$\forall x (G(x) \longrightarrow \exists y \exists z (R(y) \wedge R(z) \wedge \exists E(x,y) \wedge \exists E(x,z) \wedge \neg (y = z)))$$

ב: בין כל שני צמתים ירוקים שונים, קיים מסלול באורך 2 העובר בצומת אדום.

$$\forall x \forall y \left(\left(G\left(x\right) \wedge G\left(y\right) \wedge \neg\left(x=y\right)\right) \longrightarrow \exists z\left(E\left(x,z\right) \wedge E\left(z,y\right) \wedge R\left(z\right)\right)\right)$$

ג: אין אף שכנים ירוקים.

$$\neg\left(\exists x \exists y \underline{\left(G\left(x\right) \wedge G\left(y\right) \wedge E\left(x,y\right)\right)}\right)$$

משפט שקול: $\forall x \forall y \neg \underline{\left(G\left(x\right) \wedge G\left(y\right) \wedge E\left(x,y\right)\right)}$ **וזאת כי:** $\neg \exists x_n\left(\alpha\right) \equiv \forall x_n\left(\sim \alpha\right)$

ד: אין קשתות עצמיות.

$$\neg \exists x E\left(x,x\right) \vee \forall x \neg\left(E\left(x,x\right)\right)$$

ה: מס' הצמתים האדומים הוא **בדיוק** 3.

$$\exists x \exists y \exists z \underline{\left(\underline{\left(R\left(x\right) \wedge R\left(y\right) \wedge R\left(z\right) \wedge \neg\left(x=y\right) \wedge \neg\left(y=z\right) \wedge \neg\left(x=z\right)\right)} \wedge \forall t \underline{\left(R\left(t\right) \longrightarrow \underline{\left(\left(t=x\right) \vee \left(t=y\right) \vee \left(t=z\right)\right)}\right)}\right)}$$

תרגיל 2 - הוכחה בתחשיב הפסוקים

הוכח: $\alpha \longrightarrow \beta, \left(\sim\left(\beta \longrightarrow \gamma\right)\right) \longrightarrow \left(\sim \alpha\right) \vdash \alpha \longrightarrow \gamma$

הוכחה:

הנחה	$\alpha_1 = \alpha \longrightarrow \beta$
הנחה	$\alpha_2 = \left(\sim\left(\beta \longrightarrow \gamma\right)\right) \longrightarrow \left(\sim \alpha\right)$
משפט: $\left(\left(\sim \beta \longrightarrow \sim \alpha\right) \longrightarrow \left(\alpha \longrightarrow \beta\right)\right)$	$\alpha_3 = \left(\left(\sim\left(\beta \longrightarrow \gamma\right)\right) \longrightarrow \left(\sim \alpha\right)\right) \longrightarrow \left(\alpha \longrightarrow \left(\beta \longrightarrow \gamma\right)\right)$
$MP\alpha_2\alpha_3$	$\alpha_4 = \alpha \longrightarrow \left(\beta \longrightarrow \gamma\right)$
$\left(\Omega_2\right)$	$\alpha_5 = \left(\alpha \longrightarrow \left(\beta \longrightarrow \gamma\right)\right) \longrightarrow \left(\left(\alpha \longrightarrow \beta\right) \longrightarrow \left(\alpha \longrightarrow \gamma\right)\right)$
$\left(MP\alpha_4\alpha_5\right)$	$\alpha_6 = \left(\alpha \longrightarrow \beta\right) \longrightarrow \left(\alpha \longrightarrow \gamma\right)$
$\left(MP\alpha_1\alpha_6\right)$	$\alpha_7 = \alpha \longrightarrow \gamma$

תרגיל 3 - (מסוג תרגיל 2) הוכחה בתחשיב הפסוקים.

הוכח: $(\neg\beta) \longrightarrow (\neg\alpha), \alpha \vdash \beta$

$\alpha_1 = \neg\beta \longrightarrow \neg\alpha$	הנחה
$\alpha_2 = \alpha$	הנחה
$\alpha_3 = (\neg\beta \longrightarrow \neg\alpha) \longrightarrow (((\neg\beta) \longrightarrow \alpha) \longrightarrow \beta)$	(Ω_3)
$\alpha_4 = (((\neg\beta) \longrightarrow \alpha) \longrightarrow \beta)$	$MP\alpha_1\alpha_3$
$\alpha_5 = (\alpha \longrightarrow ((\neg\beta) \longrightarrow \alpha))$	(Ω_1)
$\alpha_6 = (\neg\beta) \longrightarrow \alpha$	$(MP\alpha_2\alpha_5)$
$\alpha_7 = \beta$	$(MP\alpha_1\alpha_6)$

שיעור 10

חזרה למבחן

הנושא: לוגיקה של ידע Multi Agent System

במערכת מרובת סוכנים, לסוכנים שונים יש ידע שונה על העולם. הסוכן צריך להתחשב בידע שלו על העולם, וגם צריך להתחשב במה שאחרים יודעים על העולם.

דוגמה: חידת האנשים החכמים

נניח יש שלושה אנשים חכמים. כולם יודעים, וכולם יודעים שכולם יודעים שיש שלושה כובעים אדומים ושני כובעים לבנים. המלך שם כובע על ראשו של כל אחד מהאנשים החכמים באופן כזה שהם לא יכולים לראות את הכובע שעל ראשם, אך הם יכולים לראות את כובעם של האחרים. המלך שואל כל אחד בתורו אם הוא יודע מה צבע הכובע שעל ראשו. נניח שהראשון ענה כי הוא לא יודע, והשני ענה שגם הוא לא יודע. מכאן נובע שהאיש השלישי חייב לדעת את צבע הכובע שעל ראשו.
השאלה - מדוע? מה צבע כובעו של האיש השלישי?
חשוב לציין: כל האנשים דוברים אמת וכולם חכמים, כולם יודעים זאת, וכולם יודעים שכולם יודעים זאת.

תשובה: נבחן את האפשרויות הקיימות. נסמן כובע אדום ב-R וכובע לבן ב-W. כלומר הסדרות האפשריות הן: $\begin{array}{cccc} RRR & RRW & WRR & WWR \\ RRW & RWR & WRW & \cancel{W}WR \end{array}$ כלומר 7 אפשרויות. האיש הראשון ענה כי הוא לא יודע ולכן האיש השני והשלישי יכולים לפסול את RWW, כי אם הראשון היה רואה שלשניים האחרים כובעים לבנים, מייד היה מסיק כי כובעו אדום. כעת, האיש השני ענה שגם הוא לא יודע, מכאן האיש השלישי יכול לפסול את האפשרות WRW כמו קודם. בנוסף לכך, ניתן לפסול את האפשרות RRW. זאת משום שאם האיש השני היה רואה כי לאיש הראשון כובע אדום ולשלישי לבן, האיש השני היה יכול להסיק שמדובר באפשרות RWW או RRW, אבל מתוך תשובתו של האיש הראשון, האיש השני יודע כי לא מדובר ב-RWW (כפי שאמרנו בהתחלה) ולכן יכל להסיק כי מדובר באפשרות RRW. מתוך כך שהאיש ענה שהוא לא ידע את צבע כובעו, האיש השלישי יכל להסיק שלא מדובר באפשרות RRW. כלומר 4 האפשרויות הנותרות כוללות את הכובע השלישי אדום, כלומר מהצורה $R**$, וכך האיש השלישי ידע שכובעו אדום.

שאלה 1: כל אחד מהאנשים נשאל האם ידע את צבע כובעו. נניח כי האיש הראשון כנה לא, אבל האיש השני ענה כן. מה צבע כובעו של האיש השני?

שאלה 2: תחת אותם הנחות של שאלה 1, האם האיש השלישי יכול לדעת את צבע כובעו? אם כן, מהו?

שאלה 3: אם האיש השלישי היה עיוור, מה היו התשובות לשאלה 1 ו־2? ומה היה קורה לו האיש הראשון היה עיוור?

תשובה 1: הראשון ענה לא, לכן נפסלה האפשרות RWW. השני אמר כן, כלומר זה יכול להיות WRW או שזה יכול להיות RRW. לכן, צבע כובעו של השני אדום.

תשובה 2: תחת אותן הנחות, האיש השלישי יכול לדעת, משום שבשתי האפשרויות הצבע השלישי הוא לבן.

תשובה 3: אם האיש השלישי היה עיוור, התשובות לשאלות 1 ו־2 לא היו משתנות, כיוון שהאיש השלישי ביסס את מסקנתו על סמך שמיעה ולא ראייה. אם האיש הראשון היה עיוור, אז אחרי שהוא ענה לא, לא היינו יכולים לפסול את אפשרות RWW. האיש השני אומר כן, כלומר האפשרות היחידה היא WRW. ולכן האיש השלישי גם הוא יודע לענות, והוא היה עונה לבן. לכן, התשובות לשאולות 1 ו־2 לא היו משתנות.