אלגברה לינארית 1 ־ תרגולים

מבוסס על התרגולים של ד"ר אפי כהן

שיעור 1

מספרים מרוכבים

שדה המספרים המרוכבים מוגדר ע"י הקבוצה $\mathbb{C} := \mathbb{R}\left[i\right] = \left\{a+bi|a,b\in\mathbb{R}\right\}$

פעולת חיבור: $(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)\,i$

פעולת כפל: $(a+bi)\,(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)\,i$

המישור של גאוס:

נגדיר את המספרים המרוכבים כך:

$$a+bi\leftrightarrow(a,b)$$

בצורה כזאת נקבל את ההגדרה של מספרים מרוכבים כמו בשיעור שעבר.

שיעור 2

משוואות לינאריות

משוואה לינארית עם נעלמים $x_1,x_2,\cdots,x_n$ ניתנת להצגה בצורה הסטנדרטית $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b$ כאשר המספרים $a_1,a_2,\cdots,a_n,b$הם קבועים. הקבוע a_k נקרא המקדם של x_k ו־b נקרא הקבוע של המשוואה.

דוגמה:

$$3x+2y=3$$

הקבוע של המשוואה הוא 3.
פתרון של המשוואה הוא קבוצת כל הערכים עבור כל הנעלמים

$$x_1=k_1,x_2=k_2,\cdots,x_n=k_n$$

$U=(k_1,k_2,\cdots,k_n)$ של קבועים המקיימים את המשוואה:

$$a_1k_1+a_2k_2+\cdots+a_nk_n=b$$

על קבוצת ערכים זו אומרים כי היא מקיימת את המשוואה.

דוגמה:

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6$$

נשים לב כי $(1,1,1)$מקיימת את המשוואה. נשים לב שלמשוואה יש אינסוף פתרונות.
מציאת פתרון כללי:
$x_1 = 3 - \frac{3}{2}s - \frac{1}{2}t$,$x_2 = s$,$x_3 = t$

$$\left(3 - \frac{3}{2}s - \frac{1}{2}t, s, t\right) = (3,0,0) + \left(-\frac{3}{2}s, s, 0\right) + \left(-\frac{1}{2}t, 0, t\right) = (3,0,0) + s\left(-\frac{3}{2}, 1, 0\right) + t\left(-\frac{1}{2}, 0, 1\right)$$

(הפרדת וקטור ההזזה הקבוע: $(3,0,0)$לשאר הווקטורים התלויים במשתנים s,t)

הגדרה: משוואה שבה הקבוע $b = 0$ נקראת משוואה הומוגנית.

מערכת של שתי משוואות בשני נעלמים

נסמן: $x_1 = x$, $x_2 = y$

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

כל אחת מהמשוואות מייצגת קו ישר.

1. פתרון יחיד: הישרים נחתכים.

2. אינסוף פתרונות: הישרים מתלכדים.

3. אין פתרון: הישרים מקבילים.
אם המערכת הומוגנית אזי מתקיים עבורה $c_1 = c_2 = 0$. יש לפחות פתרון אחד למשוואה: $(0,0)$.
אם מתקיים $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ אזי מתקיים אחד מהמקרים: 2 או 3.
אם מתקיים $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ אזי מתקיים מקרה 2.
אם מתקיים $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ אזי מתקיים מקרה 3.

דוגמה:

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 4x + 2y = 0 \end{cases}$$

$$-2R_1 + R_2 \longrightarrow R_2$$

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 0 \cdot x + 0 \cdot y = 0 \end{cases}$$

משוואה שבה כל המקדמים שווים ל־0, נקראת משוואה מנוונת.
אם קבוע המשוואה המנוונת (b) שונה מאפס, אז אין פתרון למערכת.
אם קבוע המשוואה המנוונת שווה לאפס, אז ניתן למחוק את המשוואה.

$$2x + y = 0$$

נסמן $x = -\frac{t}{2}$, $y = t$
$\left(-\frac{t}{2}, t\right) = t\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$
אזי $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$ הוא פתרון של המשוואה.

איך הגענו לפתרון?

נניח כי (α,β) הוא פתרון של המשוואה ההומוגנית שרשמנו, אזי $(t\alpha,t\beta)$ הוא גם פתרון של המשוואה הומוגנית.
מכיוון ש־ $2t\alpha+t\beta=t\left(2\alpha+\beta\right)=0$ וניתן להציב כל t שנרצה.

הערה: נניח כי (a,b) פתרון של המשוואה $2x+y=4$ ונניח כי (α,β) פתרון של המשוואה ההומוגנית המתאימה.
אזי: $(a,b)+(t\alpha,t\beta)=(a,b)+t\left(\alpha,\beta\right)$ הוא גם פתרון של המשוואה.

סיכום: פתרון של משוואה לא הומוגנית = פתרון פרטי של המשוואה הלא הומוגנית + פתרון כללי של המשוואה ההומוגנית.

מערכת של משוואות לינאריות

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\ \vdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}$$

מטרה: לפתור מערכת משוואות עם שני נעלמים או יותר.

הגדרה:

שתי מערכות של משוואות לינאריות באותם נעלמים נקראות שקולות, אם למערכת יש את אותה קבוצת פתרון.
נסמן את המשוואות הלינאריות במערכות ב־ $R_1,R_2,\cdots,R_m$

פעולות יסודיות:

$R_i\leftrightarrow R_j$ השורה ה־i במערכת מתחלפת עם השורה ה־j במערכת.
$kR_i\to R_i$ הכפלת השורה ה־i בסקלר (מספר $k\neq 0$)
$kR_j+pR_i\to R_i$ הכפלת השורה ה־j ב־k, הוספה לשורה ה־i המוכפלת ב־p $(p\neq 0)$ והחלפה עם השורה ה־i.

הערה: אם נבצע במערכת משוואות פעולה יסודית, נקבל מערכת שקולה למערכת הנתונה.

דוגמה:

$$\begin{cases}x+2y-4z=-4\\ 5x+11y-21z=-22\\ 3x-2y+3z=11\end{cases}$$

פתרון:

$$-5R_1+R_2\to R_2$$

$$\begin{cases}x+2y-4z=-4\\ y-z=-2\\ 3x-2y+3z=11\end{cases}$$

$$-3R_1+R_3\to R_3$$

$$\begin{cases} x+2y-4z=-4 \\ y-z=-2 \\ -8y+15z=23 \end{cases}$$

$$8R_2+R_3 \to R_3$$

$$\begin{cases} x+2y-4z=-4 \\ y-z=-2 \\ 7z=7 \end{cases}$$

אז הפתרון הוא: $x=2$, $y=-1$, $z=1$ (או: $(2,-1,1)$)

מטריצות

יהי A מערך מלבני של מספרים מהצורה:

$$A=\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix}$$

המערך A נקרא מטריצה (נקראת גם מטריצת המקדמים). ניתן לסמן מטריצה כזו על ידי $A=(a_{ij})$ כאשר $j=1,\cdots,n$ ו־ $i=1,\cdots,m$

מטריצה A נקראת מטריצה מדורגת כאשר:

א. כל שורות האפסים, אם ישנן, ממוקמות בתחתית המטריצה.

ב. כל איבר מוביל (איבר שכל האיברים שלפניו שווים ל־0) אשר שונה מאפס, ממוקם מימין לאיבר המוביל השונה מאפס בשורה הקודמת.

על מטריצה A נאמר שהיא שקולת שורה למטריצה B ונסמן $A \sim B$, אם ניתן לקבל את B מ־A ע"י סדרה סופית של הפעולות היסודיות.

מטריצה מורחבת של מערכת משוואות לינארית היא:

$$M=\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{matrix}$$

דוגמה לשימוש במטריצה מורחבת

$$\begin{cases} x+y-2z+4t=5 \\ 2x+2y-3z+t=3 \\ 3x+3y-4z-2t=1 \end{cases}$$

המטריצה המורחבת המתאימה היא:

$$\begin{matrix} 1 & 1 & -2 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & -3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & -4 & -2 & 1 \end{matrix}$$

$$-2R_1 + R_2 \to R_2$$

$$\begin{matrix} 1 & 1 & -2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & -7 \\ 3 & 3 & -4 & -2 & 1 \end{matrix}$$

$$-3R_1 + R_3 \to R_3$$

$$\begin{matrix} 1 & 1 & -2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 2 & -14 & -14 \end{matrix}$$

$$-2R_2 + R_3 \to R_3$$

$$\begin{matrix} 1 & 1 & -2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x + y - 2z + 4t = 5 \\ z - 7t = -7 \end{cases}$$

כעת יש לנו משתנה חופשי t. נסמן אותו בפרמטר $t = a$.
אזי: $z = -7 + 7a$

$$x + y + 14 - 14a + 4a = 5$$

כעת יש לנו משתנה חופשי y. נסמן אותו בפרמטר $y = b$.

$$x = 10a - 9 - b$$

אזי הפתרון הוא:

$$(10a - 9 - b, b, -7 + 7a, a) = (-9, 0, -7, 0) + (10a, 0, 7a, a) + (-b, b, 0, 0) = (-9, 0, -7, 0) + a\,(10, 0, 7, 1) + b\,(-1, 1, 0, 0)$$

שיעור 3

שדה סופי - המאפיין של שדה

הערה

1.

כפל יוגדר כ- $a \cdot b$ כאשר $a, b \in \mathbb{F}$.

כפל בין שני איברים בשדה, על פי אקסיומת הסגירות לכפל, נותנת תוצאה איבר יחיד השייך לשדה.

2.

$n \cdot a$ כאשר $a \in \mathbb{F}$ ו- $n \in \mathbb{N}$:

$$n \cdot a = a_{\mathbb{F}} + a_{\mathbb{F}} + ... + a_{\mathbb{F}} (n\, times)$$

דוגמה: נתבונן בשדה $\mathbb{Z}_5$ המכיל את $\{0, 1, 2, 3, 4\}$

אזי: (7 פעמים) $7 \cdot 2 = 2 + 2 + 2 + ... + 2$

מאפיין של שדה - הגדרה:

המאפיין של שדה $\mathbb{F}$, הוא המספר הטבעי n הקטן ביותר כך שמתקיים $n \cdot 1_{\mathbb{F}} = 0_{\mathbb{F}}$

משפט: $\mathbb{Z}_n$ שדה אם ורק אם n ראשוני.

הוכחה: בשלילה, נניח n לא ראשוני, אז קיימים מספרים טבעיים k, l כך ש- $k \cdot l = n$

$\underbrace{(1_{\mathbb{F}} + ... + 1_{\mathbb{F}})}_{k\, times \neq 0} \cdot \underbrace{(1_{\mathbb{F}} + ... + 1_{\mathbb{F}})}_{l\, times \neq 0} = 1_{\mathbb{F}} + ... + 1_{\mathbb{F}} = 0_{\mathbb{F}}$

קיבלנו שני איברים בקבוצה, שונים מאפס, שמכפלתם אפס. ולכן הקבוצה אינה שדה.

בכיוון השני: אם n מספר ראשוני, נסמנו $n = p$ ונראה כי $\mathbb{Z}_p$ שדה.

נוכיח כי לכל איבר ב-$\mathbb{Z}_p$ יש איבר הופכי, שאר האקסיומות קלות להוכחה.

נניח $a, b \in \mathbb{Z}_p$ כך ש- $a \neq b$ אזי $a + (-b) \neq 0$

$\mathbb{Z}_p = \{0, 1, 2, ..., p-1\}$, יהי $0 \neq a \in \mathbb{Z}_p$ צריך להוכיח של- a יש איבר הופכי ז"א, קיים $b \in \mathbb{Z}_p$ כך ש- $a \cdot b = 1$

נתבונן בקבוצה $\{a \cdot 0, a \cdot 1, a \cdot 2, ..., a \cdot (p-1)\}$

כל האיברים בקבוצה נמצאים ב- $\mathbb{Z}_p$, מספיק להוכיח שכל האיברים שונים זה מזה.

נניח בשלילה שקיימים שני איברים c, d כך ש- $c \neq d$ אבל $a \cdot c = a \cdot d$

$$a \cdot c + (-a \cdot d) = 0$$

$$\underbrace{a}_{\neq 0} \cdot \underbrace{(c + (-d))}_{\neq 0} = 0$$

קיבלנו סתירה.

משפט:

תהי מערכת משוואות לינאריות בצורה מדורגת אז:

א.

$r = n$, כלומר, מספר המשוואות שווה למספר הנעלמים. במקרה זה יש למערכת פתרון יחיד.

ב.

$r < n$, יש פחות משוואות מנעלמים. אזי ניתן לייחס ערכים שרירותיים ל-$(n-r)$ המשתנים החופשיים, ולקבל פתרון למערכת.

מטריצה מדורגת קנונית היא מטריצה מדורגת המקיימת:

1. כל איבר מוביל השונה מאפס, הוא 1.
2. כל איבר מוביל השונה מאפס, הוא האיבר היחיד השונה מאפס בעמודתו.

דוגמאות:

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

שיעור 4

כפל מטריצות

דוגמה:

$$\overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}^{A} \cdot \overbrace{\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}}^{B} = \overbrace{\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix}}^{C}$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{3} a_{ik} \cdot b_{kj}$$

נניח ש־ $A = (a_{ij})$ ו־ $B = (b_{ij})$ הן מטריצות כך שמספר העמודות של A שווה למספר השורות של B. למשל: $A \in \mathbb{F}^{m \times p}$, ו־ $B \in \mathbb{F}^{p \times n}$

נקבל מטריצה חדשה, $AB \in \mathbb{F}^{m \times n}$ כאשר $AB = C$, $C = (c_{ij})$, $c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} \cdot b_{kj}$

הגדרה:

מטריצה ריבועית (מטריצה שבה מספר השורות והעמודות זהה)ץ
$A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ נקראת:
משולשית עליונה: אם לכל $j < i$, a_{ij}.
משולשית תחתונה: אם לכל $j > i$, a_{ij}.
מטריצה משולשית: אם היא מטריצה משולשית עליונה או תחתונה.
מטריצה אלכסונית: אם לכל $i \neq j$, $a_{ij} = 0$.
מטריצה סקלרית: אם קיים סקלר α, כך ש־ $A = \alpha \cdot I$.

מטריצות אלמנטריות:

נסמן ב־e פעולת שורה אלמנטרית וב־$e(A)$, את תוצאה של יישום פעולה e על מטריצה A.

דוגמה:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 1 \\ 8 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad e : R_2 \leftrightarrow R_3 \quad e(A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

המטריצה E, המתקבלת ע"י יישום e על מטריצת היחידה, $E = e(I)$, נקראת המטריצה האלמנטרית המתאימה לפעולת השורה האלמנטרית e.

משפט:

תהי e פעולת שורה אלמנטרית ו־E, המטריצה ה־n ריבועית האלמנטרית המתאימה. כלומר, $E=e\left(I\right)$, אזי לכל מטריצה A מגודל $n\times m$, $e\left(A\right)=E\cdot A$.

דוגמה לשימוש במטריצה אלמנטרית (במטריצות ריבועיות)

מטריצה A נקראת הפיכה אם קיימת מטריצה B כל ש־ $B\cdot A=I$.
המטריצה האלמנטרית ־ בעזרתה ניתן למצוא את המטריצה ההופכית.

לפי משפט מההרצאה, $A\cdot\left(B\cdot C\right)=\left(A\cdot B\right)\cdot C$
נניח שיש צורך ביותר מפעולה אלמנטרית אחת על מנת לקבל את מטריצת היחידה.
E_1־ המטריצה המתאימה לפעולה הראשונה, E_2 לשנייה, וכן E_k הוא המטריצה המתאימה לפעולה ה־k.
אזי: $E_k\cdot\left(\cdots\left(E_2\left(E_1\cdot A\right)\right)\right)=\left(E_k\cdot\cdots\cdot E_2E_1\right)\cdot A=I$

תרגיל:

הוכח או הפרך:
כל המטריצות המשולשיות מעל $\mathbb{R}$ סגורות לכפל.

פתרון: הסבר קצר:
קבוצה של מטריצות סגורה לכפל אם לכל שתי מטריצות בקבוצה נקבל שהמכפלה שלהם גם כן בקבוצה.
מטריצה $A=a_{ij}$ נקראת מעל $\mathbb{R}$ אם לכל $1\leq i,j\leq n$, $a_{ij}\in\mathbb{R}$.
הוכחה:
יהיו A,B מטריצות משולשיות.
נניח ש־ A משולשית עליונה, ו־B משולשית תחתונה.
אזי:

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ 0 & a_{22} & a_{23}\\ 0 & 0 & a_{33}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b_{11} & 0 & 0\\ b_{21} & b_{22} & 0\\ b_{21} & b_{32} & b_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_{11} & \overbrace{c_{12}}^{can\,be\neq0} & c_{13}\\ c_{21} & c_{22} & c_{23}\\ c_{31} & \underbrace{c_{32}}_{can\,be\neq0} & c_{33}\end{pmatrix}$$

לכן דוגמה נגדית תהיה:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 4 & 5\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 3 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 4 & c_{13}\\ c_{21} & c_{22} & c_{23}\\ c_{31} & 6 & c_{33}\end{pmatrix}$$

וקיבלנו מטריצה שאינה משולשית.

מטריצה משוחלפת

תהי מטריצה $A=\left(a_{ij}\right)$. נאמר שמטריצה B היא המטריצה המשוחלפת אם $B=\left(a_{ji}\right)$. נסמן $B=A^T$.

הגדרה: אם $A^T=A$, נאמר ש־ A סימטרית.
דוגמה:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 5 & 7\\ 5 & 2 & 6\\ 7 & 6 & 3\end{pmatrix}=A^T$$

הערה: $\left(AB\right)^T=B^T\cdot A^T$

תרגיל: נתון A,B מטריצות סימטריות. אז AB סימטרית אםם $A\cdot B=B\cdot A$.
פתרון:
נניח $A\cdot B$ סימטרית. אזי $A\cdot B=(A\cdot B)^T=B^T\cdot A^T=B\cdot A$
נניח $A\cdot B=B\cdot A$. אזי $(A\cdot B)^T=B^T\cdot A^T=B\cdot A=A\cdot B$

שיעור 5

מערכת משוואות לינאריות

רישום באמצעות כפל מטריצות

דוגמה: $A=\begin{pmatrix}3&1&2\\0&1&3\\-1&2&1\end{pmatrix}$, אם נרשום $A\underline{x}=0$ אזי זה שקול לרשום: $\begin{pmatrix}3&1&2\\0&1&3\\-1&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ או: $\begin{cases}3x_1+x_2+2x_3=0\\x_2+3x_3=0\\-x_1+2x_2+x_3=0\end{cases}$
אם:

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&a_{m3}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{pmatrix}$$

תרגיל: יהיו u,v פתרונות למערכת הלא הומוגנית $Ax=b$. מהו התנאי על α,β כדי ש־ $\alpha u+\beta v$ גם יהיה פתרון למערכת.

פתרון: נתון ש־u,v פתרונות של המערכת $Ax=b$, ז"א $Au=b$ וגם $Av=b$
מטרה: $A(\alpha u+\beta v)=b$

$$A(\alpha u+\beta v)=A\alpha u+A\beta v=\alpha Au+\beta Av=\alpha b+\beta b=(\alpha+\beta)b$$

ולכן $\alpha+\beta=1$.

אם H היא קבוצת הפתרונות של המערכת ההומוגנית L קבוצת הפתרונות של המערכת הלא הומוגנית.

$$L=\{H+V_0\ :\ Ax=V_0\}$$

תרגיל: תנו דוגמה למערכת לא הומוגנית שלמערכת ההומוגנית המתאימה יש 7 פתרונות ומספר הפתרונות של המערכת הלא הומוגנית שונה ממספר הפתרונות של המערכת ההומוגנית.

דוגמה

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\4&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\12\end{pmatrix}$$

מה הם כל הפתרונות אם נתון שהשדה הוא $\mathbb{Z}_{13}$?
נמצא פתרון כללי למערכת הלא הומוגנית:
1. פתרון כללי למערכת ההומוגנית:

$$\begin{cases}x_1+2x_2=0\\4x_1+8x_2=0\end{cases}\underbrace{\longrightarrow}_{4R_1-R_2\to R_2}x_1=11t,x_2=t$$

ולכן $H=\{t\,(11,1)\,:\,t\in\mathbb{Z}_{13}\}$ ויש 13 פתרונות.
מה הם כל הפתרונות אם נתון שהשדה הוא $\mathbb{Z}_7$?
נמצא פתרון כללי למערכת הלא הומוגנית:
1. פתרון כללי למערכת ההומוגנית:

$$\begin{cases} x_1+2x_2=0 \\ 4x_1+8x_2=0 \end{cases} \underbrace{\longrightarrow}_{4R_1-R_2\to R_2} x_1=11t, x_2=t$$

ולכן $H=\{t\,(5,1)\,:\,t\in\mathbb{Z}_7\}$ ויש 7 פתרונות.

תרגיל

תהי המערכת $Ax=b$ יהי $v=\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ פתרון למערכת הלא הומוגנית, ו־ $w=\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$ פתרון למערכת ההומוגנית.

עבור המטריצה: $B=\begin{pmatrix} v_1 & w_1 & v_1+w_1 & w_1-v_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ v_n & w_n & v_n+w_n & w_n+v_n \end{pmatrix}$, חשבו את AB.
ניקח מטריצה A כללית ולפי התנאים נקבל כי:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 & w_1 & v_1+w_1 & w_1-v_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ v_n & w_n & v_n+w_n & w_n+v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & b_1 & -b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_n & 0 & b_n & -b_n \end{pmatrix}$$

הגדרה

עקבה של מטריצה ריבועית $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מוגדרת ע"י $\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ ותסומן כ־$tr\,(A)$.

משפטים: יהיו $A,B\in\mathbb{F}^{n\times n}$ אזי $tr\,(AB)=tr\,(BA)$.
$tr\,(A+B)=tr\,(A)+tr\,(B)$.

תרגיל: הוכח שלא קיימות מטריצות $A,B\in\mathbb{F}^{n\times n}$ שעבורן $AB-BA=I$

פתרון:

$$tr\,(AB-BA)=tr\,(AB)-tr\,(BA)=0\neq tr\,(I)=n$$

תרגיל: תהי $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ מטריצה כך ש־ $tr\left(AA^T\right)=0$ הוכח: $A=0$.

הערה: אם $a_i\in\mathbb{R}$, $1\leq i\leq n$ מקיים $\sum_{i=1}^{n} a_i^2=0$ אזי $a=0$ לכל $1\leq i\leq n$

פתרון:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ניתן לראות ש־ $0 = \left(\sum\limits_{j=1}^{n} a_i^2\right) \sum\limits_{i=1}^{n} = tr\left(AA^T\right)$, רק אם $a_{ij} = 0$ לכל $1 \le i \le n$ ו־ $1 \le j \le n$, מכאן $A = 0$.

שיעור 6

כפל מטריצות

משפט

תהיינה $A \in \mathbb{F}^{n\times m}$, $B \in \mathbb{F}^{m\times l}$, $C \in \mathbb{F}^{l\times r}$ מטריצות. אזי: $A\left(BC\right) = \left(AB\right)C$

הוכחה: נסמן $S = AB$, נתון ש־ $A \in \mathbb{F}^{n\times m}$, $B \in \mathbb{F}^{m\times l}$ לפיכך $S \in \mathbb{F}^{n\times l}$
נסמן $T = BC$, נתון ש־ $B \in \mathbb{F}^{m\times l}$, $C \in \mathbb{F}^{l\times r}$ לפיכך $T \in \mathbb{F}^{m\times r}$
המטריצה $S = s_{ik}$ על פי הגדרת כפל מטריצות:

$$s_{ik} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}b_{jk}$$

נחשב את $S \cdot C$ לפי הגדרת כפל מטריצות ונקבל שהאיבר בעמודה p ושורה i:

$$SC = \sum_{k=1}^{l} s_{ik}c_{kp} = \sum_{k=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\left(a_{ij}b_{jk}\right)c_{kp} = \sum_{k=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\left(a_{ij}b_{jk}\right)c_{kp}$$

נחשב את המטריצה $T = t_{jp}$

$$t_{jp} = \sum_{k=1}^{l} b_{jk}c_{kp}$$

נחשב את $A \cdot T$:

$$AT = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}t_{jp} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\sum_{k=1}^{l} b_{jk}c_{kp}$$

מכיוון שכל האיברים בשדה, נקבל ש־ $AT = SC$ ולכן המטריצות שוות.

מטריצות הפיכות

מטריצה ריבועית A נקראת הפיכה (או: לא סינגולרית)
אם קיימת מטריצה B כך ש־ $AB = BA = I$

הערה: מטריצה B כזו היא יחידה, נאמר שהיא המטריצה ההופכית ל־A ונסמן אותה ב־A^{-1}.

(חזרה על משפט):

תהי e פעולת שורה אלמנטרית ו־E, המטריצה ה־n ריבועית האלמנטרית המתאימה. כלומר, $E = e(I)$, אזי לכל מטריצה A מגודל $n \times m$, $e(A) = E \cdot A$.

נניח שמטריצה A היא הפיכה, ניתן להגיע בעזרת מספר סופי k של פעולות שורה אלמנטריות ל־I.
נניח שיש צורך ביותר מפעולה אלמנטרית אחת על מנת לקבל את מטריצת היחידה:
E_1 ־ המטריצה המתאימה לפעולה הראשונה, E_2 לשנייה, וכן E_k הוא המטריצה המתאימה לפעולה ה־k.
אזי: $E_k \cdot (\cdots (E_2 (E_1 \cdot A))) = \underbrace{(E_k \cdot \cdots \cdot E_2 E_1)}_{A^{-1}} \cdot A = I$

תרגיל:

הוכיחו כי המטריצה אינה הפיכה לכל ערכי הפרמטרים:

$$\begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & f & 0 & g \\ 0 & 0 & 0 & h & 0 \end{pmatrix}$$

נחליף $R_1 \leftrightarrow R_2$:

$$\begin{pmatrix} b & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & f & 0 & g \\ 0 & 0 & 0 & h & 0 \end{pmatrix}$$

אם $a = 0$ סיימנו, אחרת נניח $a \neq 0$, $d \cdot R_2 - a \cdot R_3 \to R_3$:

$$\begin{pmatrix} b & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -ae & 0 \\ 0 & 0 & f & 0 & g \\ 0 & 0 & 0 & h & 0 \end{pmatrix}$$

נחליף $R_3 \leftrightarrow R_4$:

$$\begin{pmatrix} b & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f & 0 & g \\ 0 & 0 & 0 & -ae & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h & 0 \end{pmatrix}$$

אזי אם נבצע את הפעולה $h \cdot R_4 + ae \cdot R_5 \to R_5$ נגיע לשורת אפסים, וסיימנו.

תרגיל:

יהיו $A \in \mathbb{F}^{n \times m}$, $B \in \mathbb{F}^{m \times n}$, I_n מטריצת היחידה ב־$\mathbb{F}^{n \times n}$. הוכח כי $I_n - AB$ הפיכה אםם $I_m - BA$ הפיכה.

פתרון: " $\Rightarrow$ ": נתון $I_m - BA$ הפיכה ז"א קיימת מטריצה $(I_m - BA)^{-1}$, צריך להראות ש־$I_n - AB$ הפיכה.
נמצא את המטריצה ההופכית ל־ $I_n - AB$:
נתבונן במטריצה הבאה:

$$I_n + A (I_m - BA)^{-1} B$$

נתחיל בנתון:

$$\left(I_m - BA\right)^{-1}\left(I_m - BA\right) = I_m$$

$$\left(I_m - BA\right)^{-1} - \left(I_m - BA\right)^{-1} BA = I_m$$

$$\left(I_m - BA\right)^{-1} = I_m + \left(I_m - BA\right)^{-1} BA$$

נכפיל A משמאל ו־B מימין:

$$\underline{A \cdot \left(I_m - BA\right)^{-1} \cdot B} = A \cdot I_m \cdot B + \underline{\underline{A \cdot \left(I_m - BA\right)^{-1} BA \cdot B}}$$

כעת נכפול את $I_n + A\left(I_m - BA\right)^{-1} B$:

$$\left[I_n + A\left(I_m - BA\right)^{-1} B\right]\left(I_n - AB\right) = I_n I_n - AB + \underline{A\left(I_m - BA\right)^{-1} B} - \underline{\underline{A\left(I_m - BA\right)^{-1} BAB}}$$

אם נציב במשוואה, נקבל I_n. ההוכחה בכיוון השני זהה.

שיעור 7

מרחבים וקטוריים

הגדרה: מרחב וקטורי הוא מבנה המורכב משדה $\mathbb{F}$ עם פעולות כפל וחיבור של השדה וקבוצה V שעליה מוגדרת פעולת חיבור.
קבוצה Vעם פעולת חיבור המוגדרת על V ופעולת כפל בין איבר בשדה לאיבר ב־V, נקראת מרחב וקטורי מעל השדה $\mathbb{F}$ אם מתקיימות התכונות הבאות:

1) סגירות לחיבור: $u, v \in V$ אזי $u + v \in V$
2) לכל $u, v, w \in V$ מתקיים $(u + v) + w = u + (v + w)$
3) איבר ניטרלי: קיים $0 \in V$ כך שלכל $v \in V$ מתקיים $v + 0 = v$
4) איבר נגדי: לכל $v \in V$ קיים $-v \in V$ כך שמתקיים $v + (-v) = 0$
5) לכל $u, v \in V$ מתקיים $u + v = v + u$

הערה: התכונות 1־5 מגדירות חבורה אבלית.

תכונות הכפל בסקלר

1) סגירות: לכל $v \in V$ ו־$\alpha \in \mathbb{F}$ מתקיים $\alpha \cdot v \in V$
2) לכל $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ ולכל $v \in V$ מתקיים $\alpha \cdot (\beta \cdot v) = (\alpha \cdot \beta) \cdot v$
3) לכל $v \in V$ מתקיים $1_{\mathbb{F}} \cdot v = v$
4) לכל $\alpha \in \mathbb{F}$ ולכל $u, v \in V$ מתקיים $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$
5) לכל $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ ולכל $v \in V$ מתקיים $(\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v$

האיברים בשדה נקראים סקלרים והאיברים בקבוצה V נקראים ווקטורים.

דוגמאות

.1

$\mathbb{R}^3$ מרחב ווקטורי מעל השדה $\mathbb{R}$ כאשר פעולת החיבור מוגדרת באופן הבא:

$$(a_1,b_1,c_1)+(a_2,b_2,c_2)=(a_1+a_2,b_1+b_2,c_1+c_2)$$

הכפל בסקלר מוגדר באופן הבא:

$$\alpha\cdot(a,b,c)=(\alpha\cdot a,\alpha\cdot b,\alpha\cdot c)$$

.2

הקבוצה $W=\{(x,y,z)\mid x+y+z=0,x,y,z\in\mathbb{R}\}$ עם הגדרת החיבור והכפל כפי שהגדרנו ב־1.
נראה שאם $u,v\in W$ אזי $u+v\in W$:
נניח ש־ $u=(a_1,b_1,c_1)\wedge v=(a_2,b_2,c_2)$ אזי $u+v=(a_1,b_1,c_1)+(a_2,b_2,c_2)=(a_1+a_2,b_1+b_2,c_1+c_2)$
מספיק להראות כי $(a_1+a_2,b_1+b_2,c_1+c_2)\in W$:
מתקיים

$$\underbrace{a_1+b_1+c_1}_{=0}+\underbrace{a_2+b_2+c_2}_{=0}=0$$

סגירות עבור כפל בסקלר

יהיו $\alpha\in\mathbb{R}$ ו־ $(a,b,c)\in W$. צריך להראות כי $\alpha\,(a,b,c)\in W$, כלומר מספיק להוכיח כי $(\alpha\cdot a,\alpha\cdot b,\alpha\cdot c)\in W$

$$\alpha\cdot a+\alpha\cdot b+\alpha\cdot c=\alpha\cdot\underbrace{(a+b+c)}_{=0}=0$$

.3

הקבוצה $W=\{(x,y,z)\mid x+y+z=1,x,y,z\in\mathbb{R}\}$
W אינו מרחב וקטורי:
$(1,0,0)\in W$ אבל: $(1,0,0)+(1,0,0)=(2,0,0)\notin W$

.4

קבוצת כל הפולינומים עד מעלה n.
$P_n(x)=\left\{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0\,|\,a_0,a_1,\ldots,a_n\in\mathbb{R}\right\}$
נתבונן ב־ $P_2(x)=\left\{a_2x^2+a_1x+a_0\right\}$:
אזי

$$\underbrace{a_2x^2+a_1x+a_0}_{\in P_2(X)}+\underbrace{a_2'x^2+a_1'x+a_0'}_{\in P_2(X)}=\underbrace{\underbrace{(a_2+a_2')}_{\in\mathbb{R}}x^2+\underbrace{(a_1+a_1')}_{\in\mathbb{R}}x+\underbrace{(a_0+a_0')}_{\in\mathbb{R}}}_{\in P_2(X)}$$

דוגמה:
קבוצת כל הפונקציות $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, גם מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$
נגדיר חיבור: $\begin{matrix}f_1:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}\\ f_2:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}\end{matrix}$ כך: $g(x)=f_1(x)+f_2(x)$ לכל $x\in\mathbb{R}$
נגדיר כפל בסקלר: $\alpha\in\mathbb{R}$, $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ אזי $\alpha\cdot f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$: לכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים $(\alpha f)(x)=\alpha\cdot f(x)$

תת מרחב

הגדרה:

יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$. נאמר ש־W תת מרחב של V ונסמן $W\subseteq V$, אם :

1. $\emptyset\neq W\subseteq V$
2. הקבוצה W הוא מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$ ביחס לפעולות החיבור של V והכפל בסקלר.

משפט:

W תת מרחב של V אם:

1. $0 \in W \subseteq V$
2. לכל $w \in W$ ולכל $\alpha \in \mathbb{F}$, $\alpha \cdot w \in W$
3. לכל $u, w \in W$ מתקיים $u + w \in W$

דוגמה

אוסף פתרונות של משוואה הומוגנית הוא תת מרחב של $\mathbb{R}^n$.

למשל: נתבונן במרחב וקטורי $\mathbb{R}^3$ מעל $\mathbb{R}$.

$$W = \left\{ (x, y, z) \mid \begin{matrix} x + z = 0 \\ y - 2z = 0 \end{matrix}, x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

1) $(0, 0, 0) \in W$

2) $\alpha \in \mathbb{R}$, $(a, b, c) \in W$

$$\alpha (a, b, c) = (\alpha a, \alpha b, \alpha c)$$
$$\alpha a + \alpha c = \alpha \underbrace{(a + c)}_{=0} = 0$$
$$\alpha b - 2\alpha c = 0$$
$$\alpha b - 2\alpha c = \alpha \underbrace{(b - 2c)}_{=0} = 0$$

3) $u = (a_1, b_1, c_1) \wedge w = (a_2, b_2, c_2)$

$$(a_1, b_1, c_1) + (a_2, b_2, c_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2) \in W$$

$$b_1 + b_2 - 2(c_1 + c_2) = \underbrace{b_1 - 2c_1}_{=0} + \underbrace{b_2 - 2c_2}_{=0} = 0$$

משפט

אם U, W תתי מרחבים של V אזי $U \cap W$ תת מרחב של V.

$U + W$ תת מרחב של V. ($U + W = \{ u + w \mid u \in U, w \in W \}$)

הערה: $U \cup W$ לא בהכרח תת מרחב של V.

דוגמה:

נתבונן ב־ $W = \{ (t, 0, 0) \mid , t \in \mathbb{R} \}$ ו־ $W = \{ (0, s, 0) \mid , s \in \mathbb{R} \}$

U, W תתי מרחבים של $\mathbb{R}^3$.

$U + W = \{ (0, s, 0) + (t, 0, 0) \mid , t, s \in \mathbb{R} \}$

$U + W$ תת מרחב של $\mathbb{R}^3$.

נשים לב ש־ $(1, 1, 0) \in U + W$ אבל $(1, 1, 0) \notin W$, $(1, 1, 0) \notin U$

הגדרה:

אם $U \cap W = \{0\}$ אזי נאמר כי $V = U \oplus W$, סכום ישר.

תרגיל:

יהי V מרחב כל הפונקציות $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$
U פונקציות זוגיות.
W פונקציות אי זוגיות.
א. הוכח ש־V מ"ו מעל $\mathbb{R}$ (הראינו)
ב. הוכח ש־ U,W תתי מרחבים של V
ג. הוכח כי $V=U\oplus W$

פתרון:

ב.
נוכיח ש־ U תת מרחב של V. צריך להראות ש־ $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$כך ש־ $f(x)=0$ לכל $x\in\mathbb{R}$ היא פונקציה זוגית.
נראה שעבור $\alpha\in\mathbb{R}$ כלשהו, $f(\alpha)=f(-\alpha)$.
$f(\alpha)=0\wedge f(-\alpha)=0$ לכן $f(\alpha)=f(-\alpha)$
צריך להראות שאם $\alpha\in\mathbb{R}$, $f\in U$ אזי $\alpha f\in U$

$$(\alpha f)(x)=\alpha f(x)=\alpha f(-x)=(\alpha f)\cdot(-x)$$

לכן αf היא פונקציה זוגית.
$f,g\in U$ צ"ל $f+g\in U$

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=f(-x)+g(-x)=(f+g)(-x)$$

לכן $f+g$ פונקציה זוגית. באותו אופן ניתן להראות ש־W תת מרחב.
ג.
נראה כי $U\cap W=\{0\}$ צריך להראות שאם $f\in U\cap W$ אזי f היא פונקציית האפס.
אם $f\in U$ אזי לכל x $f(x)=f(-x)$ ואם $f\in W$ אזי $f(-x)=-f(x)$
אזי :

$$f(-x)=-f(-x)\Longleftrightarrow 2f(-x)=0\Longleftrightarrow f(-x)=0\Longleftrightarrow f(x)=0$$

לכל x ממשי.
צריך להראות שגם $V=U+W$ ז"א שאם $g\in V$ אזי קיימים $f_1\in U$ ו־ $f_2\in W$ כך ש־ $g=f_1+f_2$

$$f_1(x)=\frac{1}{2}(g(x)+g(-x))\Longleftrightarrow f_1(x)=\frac{1}{2}(g(x)-g(x))$$

$$f_1(x)+f_2(x)=g(x)$$

שיעור 8

צירוף לינארי

יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$, ויהיו $v_1,v_2,\ldots,v_n\in V$. צירוף לינארי של $v_1,\ldots,v_n$ הוא ביטוי מהצורה $\alpha_1v_1+\ldots+\alpha_nv_n$ כאשר $\alpha_i\in\mathbb{F}$

דוגמה:

נניח ש־$V=\mathbb{R}^3$, $(1,1,2),(1,3,-1)\in\mathbb{R}^3$ אזי $\begin{matrix}3\cdot(1,1,2)+4\cdot(1,3,-1)\\0\cdot(1,1,2)+0\cdot(1,3,-1)\end{matrix}$ הם דוגמאות לצירופים לינאריים של v_1,v_2. כאשר המקדמים כולם אפס נאמר כי הצירוף טריוויאלי.

הגדרה: אם כל $\alpha_i = 0$ אז הצירוף הלינארי נותן תמיד את ווקטור האפס, לכן צירוף כזה נקרא הצירוף הטריוויאלי. אם יש צירוף לא טריוויאלי של $v_1, \ldots, v_n$ כך שנקבל את וקטור האפס, נאמר כי $v_1, \ldots, v_n$ תלויים לינארית. אחרת , נאמר כי הם בלתי תלויים לינארית.

הגדרה:

תהי $\emptyset \neq S \subseteq V$ כלשהי.

1) S תלויה לינארית אם יש צירוף לינארי לא טריוויאלי של איברים מ־S שנותן את וקטור האפס.

2) הנפרש של S הוא אוסף כל הצירופים הלינאריים של איברים מ־S. (סימון: $span\left(S\right)$) . אם $span\left(S\right) = V$ אומרים ש־S פורשת את V. אם יש קבוצה סופית S שפורשת את V, אומרים ש־Vמרחב נוצר סופית.

הגדרה:

יהי V מ"ו ותהי $B \subseteq V$
B נקראת בסיס עבור V אם:
1. B בת"ל
2. $span\left(B\right) = V$

הערה: 1. יש יותר מבסיס אחד לכל מרחב ווקטורי. לכל הבסיסים יש את אותו מספר איברים. מספר האיברים בבסיס שווה למימד של המרחב הווקטורי.
2. אם קבוצה $B \subseteq V$ היא בת"ל וגם מספר האיברים ב־B שווה ל־$\dim V$ אז B בסיס של V.
3. אם קבוצה $B \subseteq V$ היא פורשת את V ז"א $span\left(B\right) = V$ וגם $|B| = \dim V$ אזי B בסיס של V.

שיעור 9

וקטור קואורדינטות

הגדרה

יהי V מ"ו n מימדי מעל שדה $\mathbb{F}$ ונניח $S = \{u_1, \ldots, u_n\}$ הוא בסיס של V. אזי, כל וקטור $v \in V$ ניתן לכתיבה באופן יחיד כצירוף לינארי של וקטורי הבסיס S $v = a_1 u_1 + \ldots + a_n u_n$
n סקלרים אלה $(a_1, \ldots a_n)$ נקראים הקוראדינטות של V ביחס לבסיס S, והם יוצרים את ה־nיה $(a_1, \ldots, a_n)$ ב־$\mathbb{F}^n$, הנקרא ווקטור הקוראדינטות של V ביחס ל־S. נסמן ווקטור זה ב־$[v]_s = (a_1, \ldots a_n)$.

מטריצת מעבר

ניתן להעביר וקטור מבסיס אחד לבסיס שני ע"י מטריצת מעבר.
נניח ש־$B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$, בסיס של V. ו־ $B' = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ גם בסיס של V.

B הוא בסיס, לכן כל ווקטור $v_i \in B'$ ניתן לכתוב באופן יחיד כצירוף לינארי של איברי B.

$$\begin{aligned} v_1 &= a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + \ldots + a_{1n}u_n \\ v_2 &= a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + \ldots + a_{2n}u_n \\ &\vdots \\ v_n &= a_{n1}u_1 + a_{n2}u_2 + \ldots + a_{nn}u_n \end{aligned}$$

תהי p המטריצה המשוחלפת של מטריצת המקדמים, אזי p נקראת מטריצת מעבר מבסיס B לבסיס B'

הגדרה:

מרחב העמודות של מטריצה $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$, $\{AV \,|\, V \in \mathbb{F}^n\}$

דוגמה: $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \;,\; \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 2x_1 + 4x_2 \\ 5x_1 + x_2 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ x_1 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^3} + x_2 \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 4x_2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^3} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

מרחב השורות של המטריצה $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, $\{A^tV \mid V \in \mathbb{F}^n\}$(מרחב עמודות עבור A^t)

דוגמה: $A^t \in \mathbb{R}^{2\times 3}$

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \ , \ \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ x_1 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\in\mathbb{R}^2} + x_2 \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}}_{\in\mathbb{R}^2} + x_3 \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\in\mathbb{R}^2} \right\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

משפט:

ממד מרחב השורות שווה למימד מרחב העמודות. נאמר שמרחב השורות/העמודות הוא דרגת המטריצה, המסומן $rank\left(A\right)$.
נניח ש־ A, B מטריצות כלשהן, אזי: $rank\left(AB\right) \leq rank\left(A\right)$ ו־ $rank\left(AB\right) \leq rank\left(B\right)$