

לוגיקה מתמטית

מבוסס על הרצאות של פרופ' דורון פלד, אוניברסיטת בר-אילן 2013.

אתר הקורס: www.cs.biu.ac.il/doron/~logic.html (מצגת עם החידה שהוצגה בשיעור: *knowledge.ppt*)

חדר: מדעי המחשב 226 שעות קבלה: יום א' 17 : 00 – 16 : 00 - שלוחה בטלפון: 8765

ספרי הקורס: Mathematical Logic - Ebbinghaus, Thomas ו־Notes on logic, Roger C. Lyndon

<http://www.dcs.warwick.ac.uk/~doron/logic.html>

שיעור 1

הקדמה

מדוע ללמוד לוגיקה?

לוגיקה הינה בסיס של המתמטיקה, עונה על שאלות פילוסופיות של "מה ניתן להוכיח?" ומהווה כלי עבור בדיקה ואימות של תוכנה וחומרה.

תכנות בלוגיקה, נעשה בשפת PROLOG.

מה נלמד?

מהו מבנה לוגי? תחביר (Syntax) ומשמעות (Semantics) של לוגיקת פסוקים, ולוגיקה מסדר ראשון.

דוגמה לנוסחה בלוגיקה: $\forall x \forall y (x < y \implies \exists z (x < z \wedge z < y))$

ספיקות של נוסחא: מעל מבנה נתון, מעל כל המבנים.

כח ביטוי: מה ניתן לתאר בלוגיקה ומה לא ניתן? כיצד ניתן להוכיח שלא ניתן לתאר מבנה כלשהו בעזרת לוגיקה מסדר ראשון.

עוד נלמד, כיצד ניתן לכתוב הוכחות בלוגיקה (מערכת הוכחה), "נאותות": האם ניתן להוכיח רק דברים "נכונים"? "שלמות": האם ניתן להוכיח כל דבר נכון הניתן לכתיבה?.

כמו כן, נלמד את משפט השלמות ללוגיקה מסדר ראשון ומשפט אי השלמות של GOEDEL: אי אפשר לבנות מערכת שלמה ונאותה לאריתמטיקה.

תחביר וסמנטיקה

אחד העקרונות החשובים של לוגיקה הוא ההפרדה בין התחביר: הסימון וכללי הכתיבה הנאותה של נוסחאות, והסמנטיקה: המשמעות של נוסחאות.

הפרדה דומה קיימת בשפות תכנות: התחביר (Syntax) של שפת התכנות והסמנטיקה. שגיאות תחביר מתגלות בזמן הידור (קומפילציה). הסמנטיקה של השפה מכתיבה מה יתבצע ואיך.

תחביר של תורת הפסוקים

$$\begin{aligned} Var &= \{p_0, p_1, p_2, \dots, p_n\} \\ Symb &= \{\in, \wedge, \implies, \forall\} \end{aligned}$$

הגדרה: קבוצת WFF היא תת קבוצה של קבוצת המילים הסופיות מעל $Symb \cup Var$ ומוגדרת בצורה אינדוקטיבית:

$$M_{PL}(p_i, z) = z(p_i) \text{ בסיס:}$$

$$M_{PL}(T, z) = (T)$$

$$M_{PL}(F, z) = (F)$$

טבלאות אמת מסדר n זוהי פונקציה $\{0, 1\} \rightarrow \{0, 1\}$

השמות אמת

הגדרה: השמות ערך אמת¹ היא פונקציה $As := Z : Var \rightarrow \{0, 1\}$ זהו קיצור ל-²Assignment.

פונקציית המשמעות (PL = Proposition logic)

פונקציית משמעות M_{PL} היא פונקציה $M_{PL} : WFF \times As \rightarrow \{0, 1\}$. המשמעות זוהי פונקציה שלוקחת איזהשהו פסוק, והשמה של ערכי אמת, ומחזירה לנו ערך לוגי: אמת או שקר.

שיעור 2

אקסיומות (סכמות)

$$\begin{array}{l} A1 \quad (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)) \\ A2 \quad ((\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \eta)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \eta))) \\ A3 \quad (((\varphi \rightarrow F) \rightarrow F) \rightarrow \varphi) \end{array}$$

כלל היסק - MP - Modus Ponens : $\text{if } \varphi \rightarrow \psi \wedge \varphi \text{ therefore } \psi$

הוכחה

בכל שלב בהוכחה $\sum \vdash \varphi$ יכולים להופיע אחת משלושת האפשרויות הבאות:

1. פסוק מ- \sum .

2. אקסיומה.

3. אם בשורות קודמות הופיעו ההנחות של MP אז המסקנה של MP גם יכולה להופיע.

בכל שורה, נרשום גם את ההצדקה (איזה אקסיומה זו או איזה כלל היסק).

נסמן $\sum \models \varphi$ שפרושו כלדהלן:

כל הצבת אמת Z הנותנת ערך אמת 1 לכל הפסוקים שב- \sum , נותנת גם ערך 1 לפסוק φ . (המשך במצגת באתר)

משפט הדדוקציה

$$\sum \vdash \varphi \rightarrow \psi \text{ if and only if } \sum \cup \{\varphi\} \vdash \psi$$

למעשה, משפט זה מאפשר לנו להוסיף את φ לרשימת ההנחות, ולהראות כי תחת ההנחות החדשות, מתקיים ψ .

¹ "ערך אמת" זהו הגדרת הערך של משתנה מסויים. יכול להיות אמת או שקר, T או F , 1 או 0.

² בספר Notes on logic, המחברים השתמשו ב- Ass כקיצור, עובדה שהם מתחרטים עליה עד היום.

נאותות ושלמות

מערכת נקראת **נאותה** אם ניתן להוכיח רק גרירות נכונות, כלומר אם $\sum \vdash \varphi$ אז $\sum \models \varphi$.
מערכת היא **שלמה** אם ניתן להוכיח כל גרירה, כלומר אם $\sum \models \varphi$ אז $\sum \vdash \varphi$.

שיעור 3

לוגיקה מסדר ראשון

המשמעות: מבנה של גרף: $\langle V, E \rangle$.

העולם מוגדר על קבוצה של צמתים V .

היחס $E \subseteq V \times V$ (אוסף של זוגות סדורים מעל העולם) מתאר את הקשתות בגרף.

כלומר: $(v_1, v_2) \in E$ אם קיימת קשת מ- v_1 ל- v_2 .

$$V = \{1, 3, 5, 12, 15, 27\}$$

$$E = \{(1, 3), (1, 5), (5, 12), (15, 27)\}$$

המבנה $\langle N, +_N, \times_N, <_N, 0_N, 1_N \rangle$: המבנה $\langle R, +_R, \times_R, <_R, 0_R, 1_R \rangle$: *Real*

כלומר, יש את העולם, פונקציות, רלציות וקבועים במבנה.

נתבונן במבנה הבא: $\langle A, f_A, g_A, r_A, c_A, d_A \rangle$

המבנה שייך לחלק הסמנטי. העולם הוא A , f, g הם פונקציות, r רלציה ו- c, d קבועים.

דברים שנרצה לבטא בלוגיקה

- לכל צומת בגרף יש בדיוק שני שכנים.
- יש אינסוף מספרים ממשיים.
- בין כל שני מספרים רציונלים יש מספר רציונלי נוסף.

מוטיבציה: אנו נגדיר שפה שבה נוכל לבטא את כל אלו.